Cubiques invariantes par transformation du second ordre

Gilles Boutte
Agrégé de l'Université
Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Préliminaires

Nous nous proposons de présenter dans cette note les principales propriétés des cubiques planes invariantes par une transformation du second ordre.

Nous commencerons par rappeler la définition d'une telle transformation, ainsi que ses principales propriétés utilisées par la suite.

1.1 Transformation du second ordre

Rappelons tout d'abord le théorème important :

Les polaires d'un point M du plan par rapport aux coniques d'un faisceau linéaire ponctuel sont concourantes.

Le cas du faisceau ponctuel à quatre points de base est particulier car il y a alors existence et unicité du triangle autopolaire par rapport à toutes les coniques du faisceau. Nous nous intéresserons par la suite à ce seul cas.

On fixe dans le plan un quadrilatère vrai $IJKL$, on note $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques qui lui sont circonscrites et ABC son triangle diagonal, appelé triangle fondamental.

On lui associe la transformation du second ordre σ qui, à tout point M du plan, distinct d'un sommet du triangle fondamental, associe le point de concours de ses polaires par rapport aux coniques de $\mathcal{F}$; les sommets du quadrilatère de base $IJKL$ sont les points fixes de la transformation ; les points, autres que les sommets du triangle fondamental, situés sur un des cotés de ce triangle ont pour image commune le sommet opposé au côté qui les porte ; les sommets du triangle fondamental sont les pôles de la transformation, ils n'ont pas d'image mais, dans chaque cas particulier, on leur en attribue une, « par continuité », sur le côté opposé ; la transformation σ devient alors une involution de la figure considérée. Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur σ, nous noterons $M^* = \sigma(M)$.

Pour tout point M du plan, on notera $\mathcal{D}_M$ le faisceau des droites passant par M, et, pour chaque sommet du triangle fondamental (A par exemple), d_A et d'_A les deux droites de $\mathcal{D}_A$ qui passent par les sommets du quadrilatère de base, de telle sorte que $d_A \cup d'_A$ est une des coniques dégénérées de $\mathcal{F}$.

L'involution f_A définie sur $\mathcal{D}_A$ par les droites doubles d_A et d'_A transforme toute droite d de $\mathcal{D}_A$ en sa conjuguée harmonique par rapport à d_A et d'_A, elle est donc telle que, pour tout point M du plan, $f_A(AM) = (AM^*)$, en particulier $f_A(AB) = (AC)$. Cette involution conserve le birapport :

- $(AP, AQ, AR, AS) = (AP^*, AQ^*, AR^*, AS^*)$ pour quatre points P, Q, R, S quelconques ;
- $(AP, AQ, AB, AC) = (AP^*, AQ^*, AC, AB)$ pour deux points P et Q quelconques.

Par permutation circulaire, on a les résultats analogues pour les autres sommets du triangle ABC.

Une transformation du second ordre est, dans la majorité des cas, définie par l'un des ensembles de données suivants :

- ses quatre points fixes ;
- son triangle fondamental et un couple de points homologues.

Dans ce dernier cas, on peut donner :
- un des points fixes, les autres étant les sommets de son triangle précévien relativement au triangle fondamental ;
- un couple de deux points distincts homologues, la détermination des points fixes revenant alors à celle des droites doubles de deux des involutions f_A, f_B et f_C.

Pour tout point M du plan, autre que l'un des sommets du quadrilatère de base, on note Γ_M la conique de $\mathcal{F}$ qui passe par M ; la droite (MM^*) est alors tangente en M à Γ_M et en M^* à Γ_{M^*}.

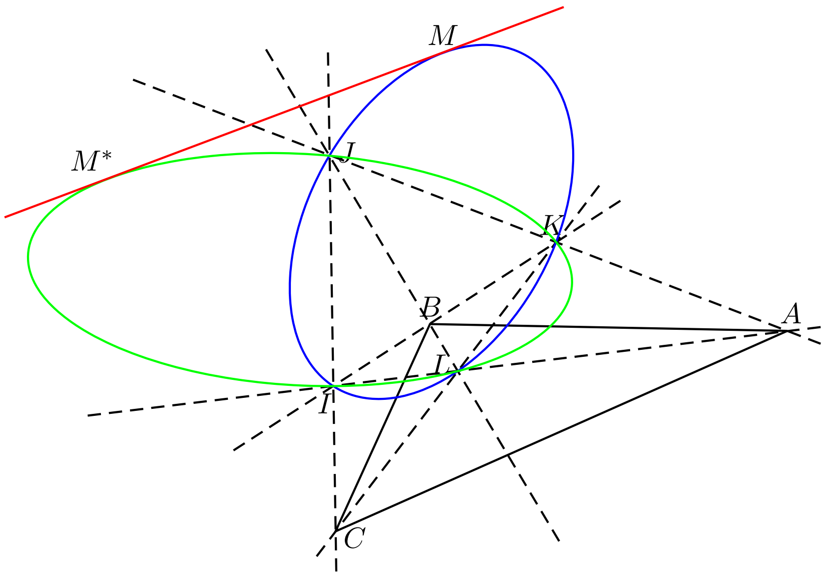

Fig. 1.1 – Points conjugués et coniques du faisceau $\mathcal{F}$

Les deux cas les plus usuels de transformation du second ordre sont :
- la transformation isogonale : $IJKL$ est un quadrilatère orthocentrique (chaque sommet est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres) : I, J, K et L sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC ; l'involution f_A est alors une symétrie orthogonale ; les points M et M^* sont dits isogonaux ou inverses par rapport au triangle ABC ;
- la transformation isotomique : $IJKL$ est tel que l'un de ses sommets est l'isobarycentre des trois autres, c'est-à dire-que I, J, K et L sont le centre de gravité et les sommets du triangle anticomplémentaire de ABC. Les points M et M^* sont dits isotomiques ou réciproques par rapport au triangle ABC.

La définition d'une transformation du second ordre est projective : étudiées dans le plan projectif, toutes les telles transformations sont conjuguées par automorphismes intérieurs modulo une homographie et ont mêmes propriétés ; par exemple, une droite, qui ne passe par aucun des points fixes, contient un couple de points homologues et un seul. Si l'on étudie les transformations du second ordre dans le plan affine, la droite de l'infini joue alors un rôle particulier, donc également le couple de points homologues de cette droite. Si l'on place l'étude dans le cadre du plan affine euclidien, la notion d'orthogonalité particularise, sur la droite de l'infini, les points cycliques, homologues pour la transformation isogonale, et elle seule.

Les propriétés projectives ou affines communes à toutes les transformations du second ordre sont facilement mises en évidence dans le cas particulier de l'isotomie. Il peut toutefois paraître préférable d'utiliser dans certains cas une transformation dont les points homologues de la droite de l'infini sont réels. Pour les propriétés euclidiennes, la comparaison des transformations isotomiques et isogonales mettent en évidence les particularités de cette dernière. Ceci explique pourquoi ces dernières ont été les plus étudiées au XIX[e] siècle et pendant la première moitié du XX[e].

1.2 Notations

Dans toute cette note nous adoptons les notations suivantes.

- ABC est un triangle non aplati, appelé triangle fondamental, dont les sommets sont à distance finie ;
- σ est une transformation du second ordre admettant les points A, B et C pour pôles ;
- $IJKL$ est le quadrilatère des points fixes de σ, il admet ABC pour triangle diagonal, ou encore chaque sommet du quadrilatère admet le triangle formé par les trois autres sommets pour triangle précévien relativement à ABC ;
- M^* désigne le point $\sigma(M)$, on dit que M et M^* sont isoconjugués ;
- $\mathcal{F}$ désigne le faisceau des coniques circonscrites à $IJKL$;
- pour tout point M du plan, Γ_M désigne la conique du faisceau $\mathcal{F}$ passant par M ;
- pour tout point M du plan, $\mathcal{D}_M$ désigne le faisceau des droites concourantes en M ;
- pour tout point M du plan, $\mathcal{F}_M$ désigne le faisceau des coniques circonscrites à $ABCM$;
- la droite de l'infini est notée d_∞ ;
- la conique $\sigma(d_\infty)$ est notée $\mathcal{C}_\sigma$, elle est circonscrite à ABC ;
- le centre de la conique $\mathcal{C}_\sigma$ est noté O_σ, lorsque σ est l'isogonalité, il s'agit du centre du cercle circonscrit à ABC noté usuellement O, lorsque σ est l'isotomie, il s'agit du centre de gravité de ABC, noté usuellement G ;
- les points à l'infini de $\mathcal{C}_\sigma$ sont notés Ω_σ et Ω'_σ, c'est l'unique couple de points σ-conjugués de d_∞ ;
- le cercle circonscrit à ABC est noté $\mathcal{C}_c$;
- la droite $\sigma(\mathcal{C}_c)$ est notée d_σ ;
- lorsque σ n'est pas l'isogonalité, le point à l'infini de d_σ est noté S_σ^*, son conjugué S_σ est le quatrième point d'intersection de $\mathcal{C}_c$ et $\mathcal{C}_\sigma$;
- G désigne le centre de gravité du triangle ABC et G_σ son image par σ ;
- H désigne l'orthocentre du triangle ABC et H_σ son image par σ ;
- les points cycliques sont notés Ω et Ω' ;
- la conique polaire d'un point M par rapport à une cubique est notée γ_M ;
- la droite polaire d'un point M par rapport à une cubique est notée δ_M ;
- la polaire mixte de deux points M et N par rapport à une cubique est notée $\delta_{M,N}$;
- la poloconique d'une droite d par rapport à une cubique est notée γ_d ;
- le tangentiel d'un point M d'une cubique est noté $\widetilde{M}$;

1.3 Courbes algébriques

En général, si $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique de degré n, $\sigma(\mathcal{C})$ est une courbe algébrique de degré $2n$; toutefois, lorsque $\mathcal{C}$ passe par un sommet du triangle fondamental, $\sigma(\mathcal{C})$ contient le côté opposé et dégénère. On convient de supprimer ce côté dans $\sigma(\mathcal{C})$ qui est alors de degré inférieur à $2n$. Ainsi définie, σ est une involution sur l'ensemble des courbes algébriques : si A, B et C sont des points multiples d'ordres respectifs p, q et r sur $\mathcal{C}$, alors $\sigma(\mathcal{C})$ est de degré $2(2n-p-q-r)$, et admet A, B et C pour points multiples d'ordres respectifs $n-q-r$, $n-r-p$ et $n-p-q$.

Pour les courbes de petit degré, on obtient les résultats suivants :

- soit d une droite ne passant par aucun sommet du triangle ABC, $\sigma(d)$ est une conique circonscrite à ABC ;
- soit d une droite passant par un seul sommet, disons A du triangle fondamental, $\sigma(d)$ est une droite possédant la même propriété, on considère souvent que $\sigma(d)$ est la conique dégénérée en la réunion de cette droite et de (BC) ;
- soit d une droite passant par deux sommets triangle fondamental, $\sigma(d)$ est réduite au troisième sommet,

on considère souvent que $\sigma(d)$ est la conique dégénérée en la réunion des deux côtés passant par ce troisième sommet ;

- soit γ une conique ne passant par aucun des points A, B, C, $\sigma(\gamma)$ est une quartique qui admet chacun de ces points pour point double ;
- soit γ une conique passant par un seul sommet du triangle ABC, $\sigma(\gamma)$ est une cubique cisconsrite à ABC et admettant ce sommet pour point double ;
- soit γ une conique passant par un seul sommet du triangle ABC mais admettant ce sommet pour point double, $\sigma(\gamma)$ est une autre conique dégénérée admettant ce sommet pour point double ;
- soit γ une conique passant par deux sommets du triangle ABC, $\sigma(\gamma)$ est une conique passant par ces mêmes sommets ;
- soit γ une conique circonscrite au triangle ABC, $\sigma(\gamma)$ est une droite ne passant par aucun des sommets du triangle ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique ne passant par aucun sommet du triangle ABC, $\sigma(\mathcal{K})$ est une sextique admettant les sommets pour points triples ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique passant par un seul sommet du triangle ABC, $\sigma(\mathcal{K})$ est une quintique admettant ce sommet pour point triple, les autres pour points doubles ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique passant par un seul sommet du triangle ABC mais admettant ce sommet pour point double, $\sigma(\mathcal{K})$ est une quartique admettant ce sommet pour point triple, les autres pour points simples ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique passant par deux sommets du triangle ABC, $\sigma(\mathcal{K})$ est une quartique admettant ces sommet pour points doubles, le troisième pour point simple ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique passant par deux sommets du triangle ABC, l'un étant un point double, $\sigma(\mathcal{K})$ est une cubique passant par ces mêmes sommets, les ordres de multiplicité étant inversés ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique circonsrite triangle ABC, $\sigma(\mathcal{K})$ est aussi une cubique circonsrite à ABC ;
- soit $\mathcal{K}$ une cubique circonsrite triangle ABC avec point double à l'un des sommets, $\sigma(\mathcal{K})$ est une conique passant par le sommet qui est point double de $\mathcal{K}$, on considère souvent que $\sigma(\mathcal{K})$ est la cubique circonscrite dégénérée en cette conique et le côté (BC).

Dans cette note nous nous limiterons à considérer les familles suivantes qui sont échangées par σ :

- chacun des faisceaux $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$, globalement invariant par σ ;
- les droites ne passant par aucun des sommets du triangle qui sont échangées avec les coniques circonscrites non dégénérées ; pour une telle droite d, $\sigma(d)$ est le lieu des pôles de d par rapport aux coniques du faisceau $\mathcal{F}$;
- la famille des coniques non dégénérées passant par deux sommets seulement du triangle, famille globalement invariante par σ ;
- la famille de toutes les droites, échangée avec la famille de toutes les coniques ;
- la famille des cubiques circonscrites, globalement invariante par σ ;
- la famille des cubiques circonscrites avec point double en un sommet, globalement invariante par σ.

1.4 Propriétés concernant droites et coniques

Nous rappelons avec ou sans démonstration quelques propriétés classiques utiles par la suite.

Proposition 1.4.1
La conique $\mathcal{C}_\sigma$ est l'ensemble des centres des coniques du faisceau $\mathcal{F}$; elle passe par les sommets du triangle fondamental ainsi que par les milieux des segments $[IJ]$, $[IK]$, $[IL]$, $[JL]$, $[JL]$ et $[KL]$.

Les milieux P et Q de deux côtés opposés $[IJ]$ et $[KL]$ du quadrilatère $IJKL$ sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}_\sigma$. Le milieu A' du côté $[BC]$ opposé à l'intersection A de (IJ) et (KL) est aligné avec P et Q.

Le centre O_σ de $\mathcal{C}_\sigma$ a pour conjugué O_σ^* son anticomplémentaire.

Preuve : Soient P le milieu de $[IJ]$ et P_∞ le point à l'infini de (IJ) ; P et P_∞ sont harmoniquement conjugués par rapport à I et J donc par rapport à toute conique du faisceau $\mathcal{F}$: P et P_∞ se correspondent

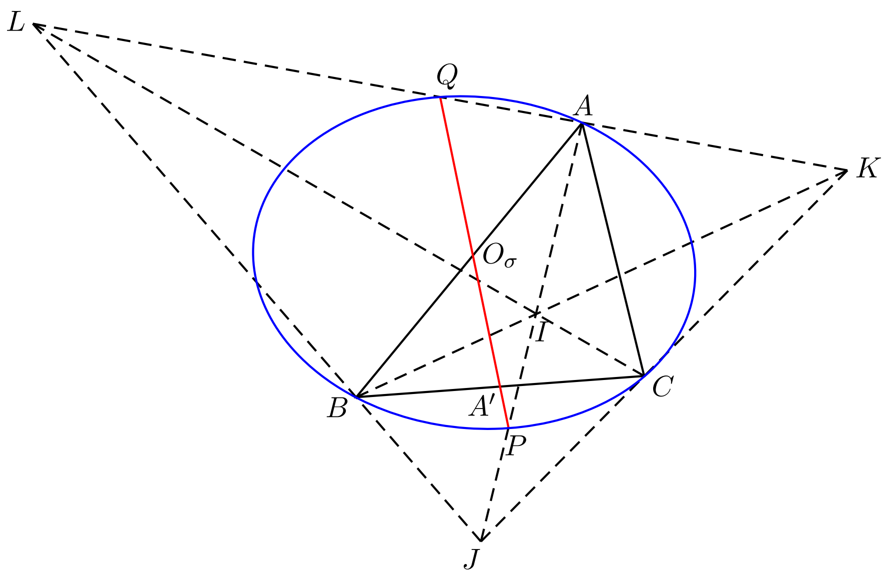

FIG. 1.2 – La conique $\mathcal{C}_\sigma$

par σ et P est un point de $\mathcal{C}_\sigma$. De même pour les milieux des autres côtés de $IJKL$, en particulier $\sigma(Q)$ est le point Q_∞ à l'infini sur (KL).

Les points Ω_σ et Ω'_σ à l'infini sur $\mathcal{C}_\sigma$ sont conjugués par σ et l'on a l'égalité de birapport dans $\mathcal{D}_A$: $(AP, AQ, A\Omega_\sigma, A\Omega'_\sigma) = (AP_\infty, AQ_\infty, A\Omega'_\sigma, A\Omega_\sigma)$ avec $(AP_\infty) = (IJ) = (AP)$ et $(AQ_\infty) = (KL) = (AQ)$ donc $(AP, AQ, A\Omega_\sigma, A\Omega'_\sigma) = (AP, AQ, A\Omega'_\sigma, A\Omega_\sigma)$ et $(AP, AQ, A\Omega_\sigma, A\Omega'_\sigma) = -1$.

Les points P et Q sont harmoniquement conjugués par rapport aux points à l'infini de $\mathcal{C}_\sigma$, ils sont diamétralement opposés sur cette conique.

La droite de Newton du quadrilatère[1] $BICJ$ passe par les milieux des trois diagonales $[BC]$, $[IJ]$ et $[KL]$, c'est-à-dire par A', P et Q qui, ainsi, sont alignés.

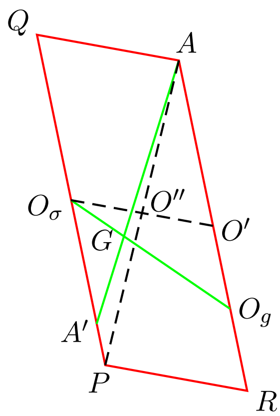

FIG. 1.3 – L'anticomplémentaire O_g de O_σ

Soient O_g l'anticomplémentaire de O_σ et R tel que $ARPQ$ soit un parallèlogramme.

Les droites $(A'O_\sigma)$ et (AO_g) sont anticomplémentaires donc parallèles : A, R et O_g sont alignés.

Si O' est le milieu de $[AR]$, alors $[AP]$ et $[O_\sigma O']$ ont même milieu O'', et les droites (AQ) et $(O_\sigma O')$ sont parallèles : O_σ et O' sont conjugués par rapport aux droites (AP) et (AQ) c'est-à-dire par rapport aux

[1]Cette droite est le lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère ; elle doit son nom à ce théorème démontré par Newton dans ses *Principes*

droites (IJ) et (KL). La polaire de O_σ par rapport à la conique dégénérée $(IJ)\cup(KL)$ du faisceau $\mathcal{F}$ est la droite (AO') qui passe par O_g.

Par permutation on montre que les polaires du point O_σ par rapport aux autres coniques dégénérées de $\mathcal{F}$ passent par O_g qui est ainsi le point de concours de ces polaires, c'est-à-dire O_σ^*.

□

PROPOSITION 1.4.2
Le triangle $T_aT_bT_c$ des tangentes en A, B et C à la conique $\mathcal{C}_\sigma$ est en perspective avec ABC ; le centre de perspective est le point G_σ, l'axe de perspective est la polaire trilinéaire commune de G_σ tant par rapport à ABC que par rapport à $T_aT_bT_c$.

Le triangle $T_aT_bT_c$ est également en perspective avec le triangle médial $A'B'C'$ de ABC ; le centre des perspective est le centre O_σ de la conique $\mathcal{C}_\sigma$.

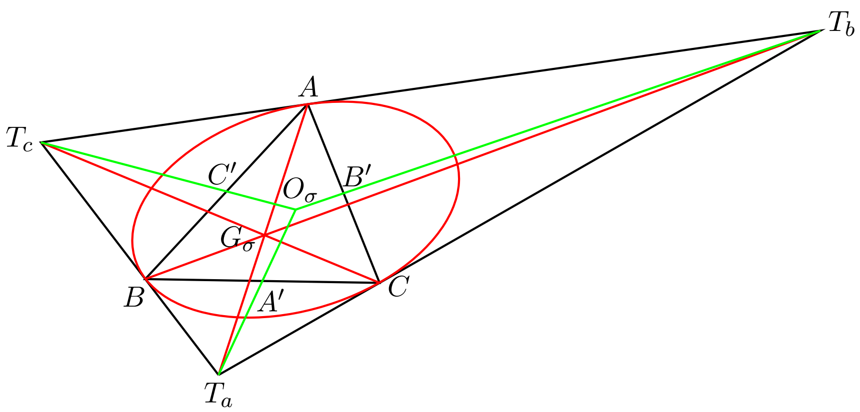

FIG. 1.4 – Le triangle tangentiel de $\mathcal{C}_\sigma$

Preuve : La droite (T_bT_c) a pour image par σ la conique dégénérée $\gamma = (T_b^*T_c^*)\cup(BC)$.

La droite (T_bT_c) est tangente en A à $\mathcal{C}_\sigma$ donc γ est tangente à d_∞ : $\gamma\cap d_\infty$ se compose de deux points confondus ; les droites $(T_b^*T_c^*)$ et (BC) sont parallèles.

De même $(T_c^*T_a^*)$ et (CA) d'une part, $(T_a^*T_b^*)$ et (AB) d'autre part, sont parallèles : $T_a^*T_b^*T_c^*$ est le triangle antimédial de ABC.

Le centre de gravité G de ABC est sur (AT_a^*) donc G_σ est sur (AT_a) ; de même G_σ est sur (BT_b) et (CT_c) : c'est le centre de perspective de ABC et $T_aT_bT_c$.

La caractérisation de l'axe de perspective est alors usuelle.

La polaire du point à l'infini A" de la droite (BC) par rapport à $\mathcal{C}_\sigma$ passe d'une part par le conjugué harmonique de A" par rapport à B et C qui est le milieu A' du segment $[BC]$, d'autre part par le point de concours T_a des tangentes en B et C à $\mathcal{C}_\sigma$, enfin par le centre O_σ de $\mathcal{C}_\sigma$ qui est donc sur la droite $(A'T_a)$.

On a les résultats analogues pour les autres côtés du triangle fondamental et O_σ est le centre de perspective de $A'B'C'$ et $T_aT_bT_c$.

□

PROPOSITION 1.4.3
Lorsque l'un des points fixes de σ, I par exemple, est à l'infini, la conique $\mathcal{C}_\sigma$ est une parabole tangente en I à d_∞ ; le point G_σ est alors sur la seconde ellipse de Steiner du triangle ABC.

PROPOSITION 1.4.4
Soit P un point non situé sur sur les côtés du triangle ABC, les polaires de P par rapport aux coniques du faisceau $\mathcal{F}_{P^*}$ concourent en un point Q. P et Q sont sur la même conique du faisceau $\mathcal{F}$.

Preuve : On sait que les polaires du point P par rapport aux coniques d'un faisceau, $\mathcal{F}_{P^*}$ par exemple, sont concourantes ; soit donc Q leur point de concours. On définit une homographie de $\mathcal{D}_P$ dans $\mathcal{D}_Q$ par $d \mapsto d'$ où d' est la polaire de P par rapport à la conique $\gamma = \sigma(d)$ de $\mathcal{F}_{P^*}$.

Le lieu du point M intersection de d et d' est une conique Γ passant par P et Q. La droite $d = (PI)$ de $\mathcal{D}_P$ est tangente à γ en I, donc la polaire d' de P par rapport à γ passe par I : Γ passe par I. De même Γ passe par J, K et L : Γ est une conique du faisceau $\mathcal{F}$ qui passe par P et Q et c'est bien évidemment la seule.

PROPOSITION 1.4.5
Soient P et Q deux points distincts qui ne sont pas points fixes de la transformation du second ordre σ et R le point d'intersection des droites (PQ) et (P^*Q^*), les droites (PQ^*) et (QP^*) sont sécantes en R^*.

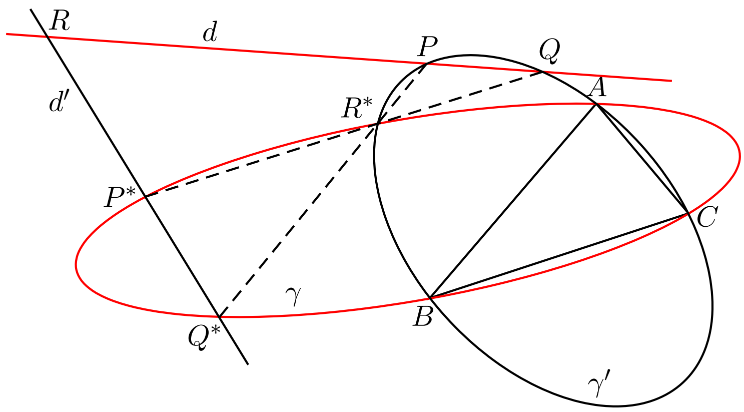

FIG. 1.5 – Configuration fondamentale

Preuve : Soient $d = (PQ)$, $d' = (P^*Q^*)$, $\gamma = \sigma(d)$ et $\gamma' = \sigma(d')$ qui appartiennent au faisceau $\mathcal{F}_{R^*}$.

Ecrivons les égalités de birapport :
- $(R^*P^*, R^*Q^*, R^*B, R^*C) = (AP^*, AQ^*, AB, AC)$ (birapport de quatre points de γ) ;
- $(AP^*, AQ^*, AB, AC) = (AP, AQ, AC, AB)$ (conservation du birapport sur $\mathcal{D}_A$ par σ) ;
- $(AP, AQ, AC, AB) = (R^*P, R^*Q, R^*C, R^*B)$ (birapport de quatre points de γ') ;
- $(R^*P, R^*Q, R^*C, R^*B) = (R^*Q, R^*P, R^*B, R^*C)$ (propriété usuelle du birapport).

Il en résulte que $(R^*P^*, R^*Q^*, R^*B, R^*C) = (R^*Q, R^*P, R^*B, R^*C)$.

On aurait de même, par permutation de A, B et C, $(R^*P^*, R^*Q^*, R^*C, R^*A) = (R^*Q, R^*P, R^*C, R^*A)$ et $(R^*P^*, R^*Q^*, R^*A, R^*B) = (R^*Q, R^*P, R^*A, R^*B)$: les droites (R^*P^*) et (R^*Q) d'une part, (R^*Q^*) et (R^*P) d'autre part sont confondues, d'où la proposition.

□

DÉFINITION 1.4.1
Des points P, Q et R, qui satisfont aux hypothèses de la proposition précédente, seront dits en configuration fondamentale.

PROPOSITION 1.4.6
Soient d une droite, γ son image par σ, M un point de γ. La droite (MM^*) recoupe γ en T tel que la droite (MT^*) soit tangente en M à γ.

Preuve : Il suffit de faire tendre P et Q vers M^* sur d dans la proprosition précédente : la droite (P^*Q^*) tend vers la tangente en M à γ.

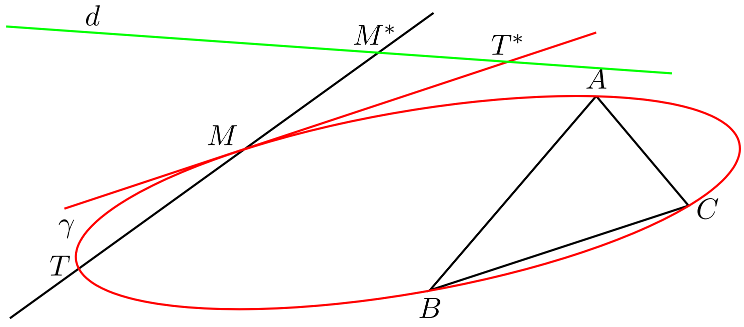

FIG. 1.6 – Propriété des tangentes aux coniques

□

On considère une droite d, on note γ la conique image de d par σ. Etant donnés trois points P_1, P_2 et P_3 sur d, pour toute permutation (i, j, k) des indices $(1, 2, 3)$, on note Q_k l'intersection des droites $(P_iP_j^*)$ et $(P_jP_i^*)$ qui est un point de γ (cf. figure 1.5 page 7).

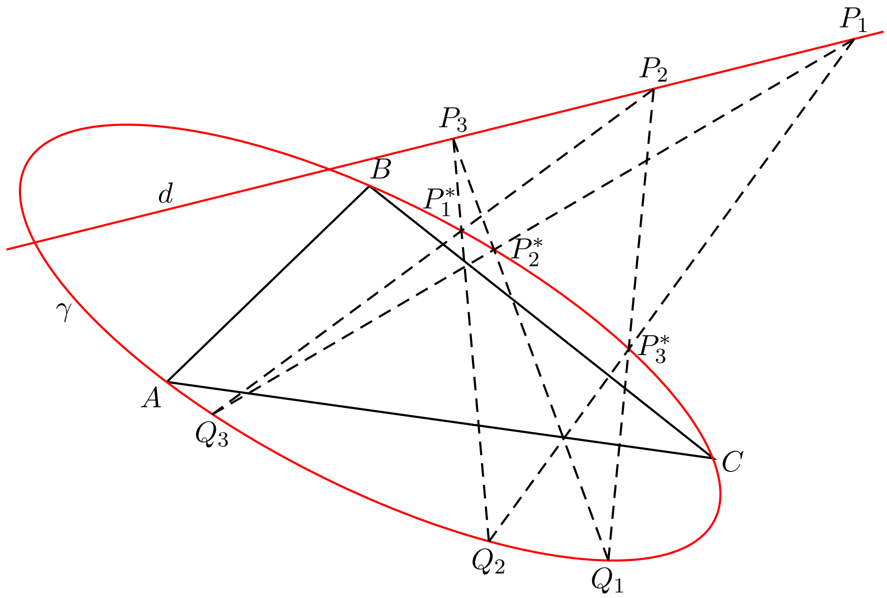

FIG. 1.7 – Configuration avec trois points alignés

Lorsque la droite d est à l'infini, la figure devient :

On note P l'intersection des droites $(P_1P_1^*)$ et $(P_2P_2^*)$, P' celle des droites $(P_1P_1^*)$ et $(P_3P_3^*)$.

Les quadrilatères $PP_1^*Q_3P_2^*$ et $P'P_1^*Q_2P_3^*$ sont des parallèlogrammes : P et P' sont confondus **SSI** $P_3^*Q_2Q_3P_2^*$ est aussi un parallèlogramme.

La polaire d_1 de P_1 par rapport à $\mathcal{C}_\sigma$ passe par les milieux des segments $[P_3^*Q_2]$ et $[P_2^*Q_3]$; la droite $(P_2^*P_3^*)$ a pour point à l'infini Q_1^*.

Alors $P_3^*Q_2Q_3P_2^*$ est un parallèlogramme **SSI** $(P_2^*P_3^*)$ est parallèle à d_1 **SSI** ces deux droites ont même point à l'infini **SSI** d_1 passe par Q_1^*.

On a le résultat (lorsque $d = d_\infty$ donc $\gamma = \mathcal{C}_\sigma$) :

PROPOSITION 1.4.7
Etant donnés trois points P_1, P_2 et P_3 sur d, les droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ sont concourantes si, et

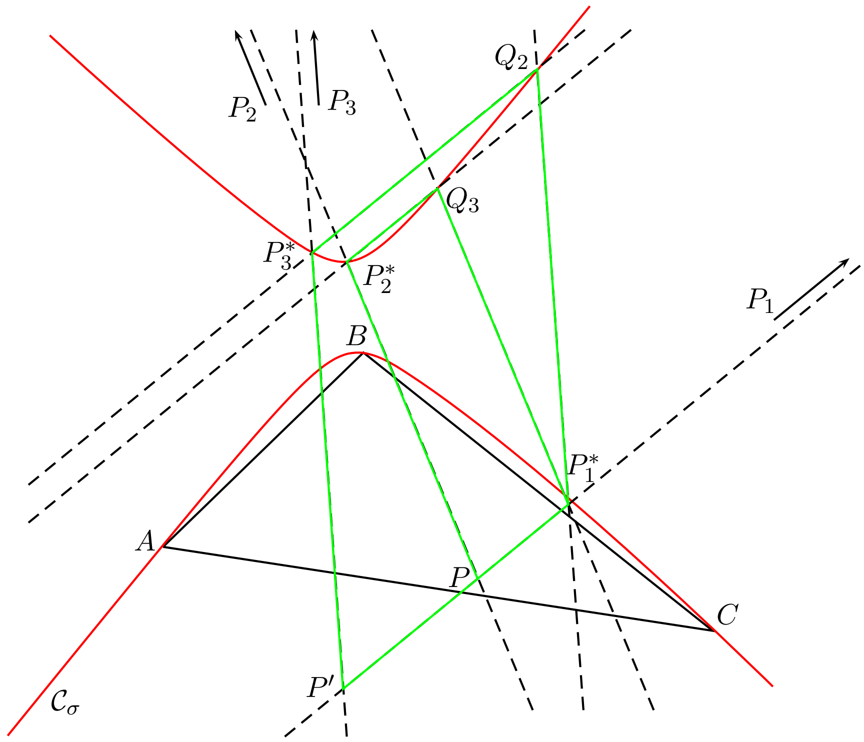

FIG. 1.8 – Configuration avec trois points à l'infini

seulement si, les points P_1 et Q_1^* (intersection de $(P_2^* P_3^*)$ et de d) sont conjugués par rapport à γ.

1.5 Isocubiques

DÉFINITION 1.5.1
On appelle σ-isocubique *une cubique circonscrite au triangle ABC, n'ayant pas de point double en l'un des sommets et globalement invariante par la transformation du second ordre σ. S'il n'y pas d'équivoque au sujet de σ, on dira plus simplement* isocubique.

La classification de ces cubiques repose sur l'étude de la famille des droites (MM^*) lorsque M décrit la cubique :

- les droites concourent en un point P ;
- les droites sont non concourantes, elles enveloppent alors une courbe (C).

Sur une droite d il n'y a en général qu'un couple de points σ-conjugués, les intersections de d avec la conique $\sigma(d)$; le point P, ou la courbe (C) suivant le cas, détermine parfaitement la cubique.

DÉFINITION 1.5.2
On appelle cubique à pivot *toute isocubique définie par un point P appellé* pivot *de la cubique comme lieu des points M tels que P, M et M^* soient alignés. En cas d'équivoque on précisera σ-cubique à pivot.*

DÉFINITION 1.5.3
On appelle cubique sans pivot *toute isocubique définie par une courbe (C) appellée* déférente pivotale *de la cubique comme lieu des points M tels que la droite (MM^*) soit tangente à (C). En cas d'équivoque on précisera σ-cubique sans pivot.*

PROPOSITION 1.5.1
Soit M un point, non point fixe de σ, d'une isocubique $\mathcal{K}$. Soit T le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{K}$ en M et M^*, le conjugué T^* est sur la droite (MM^*).

Preuve : On utilise la configuration de la figure 1.6, page 8 dans laquelle γ est la conique circonscrite à $ABCM$ tangente en M à $\mathcal{K}$: la tangente en M à $\mathcal{K}$ est donc (MT^*).

La transformation du second ordre conserve le contact et γ est $\sigma(M^*T^*)$: (M^*T^*) est la tangente en M^* à $\mathcal{K}$.

La proposition en résulte en échangeant les notations pour T et T^*.

$\square$

CHAPITRE 2

Cubiques à pivot

Nous étudions ici une isocubique $\mathcal{K}$ à pivot P.

2.1 Dégénérescence des cubiques à pivot

Soit d une droite passant par le pivot P, cherchons les points M de $\mathcal{K}$ tels que P, M et M^* soient alignés sur d, c'est-à-dire les intersections de d et $\sigma(d)$.

Si d ne passe par aucun sommet du triangle fondamental, $\sigma(d)$ est une conique propre : il n'y a donc que deux tels points, en fait un couple (M, M') de points σ-conjugués.

Remarquons que si d passe par l'un des points fixes, I par exemple, alors $M = M' = I$: I est sur $\mathcal{K}$ et d a une intersection double avec $\mathcal{K}$ en I, la tangente en I à $\mathcal{K}$ est la droite (PI).

Si d passe par un sommet du triangle fondamental, A par exemple, $\sigma(d)$ est également une droite passant par A, son intersecion avec d se réduit à A, à moins que d ne soit σ-invariante, auquel cas d est incluse dans $\mathcal{K}$ qui est par suite dégénérée.

Ces remarques permettent de discuter certaines positions particulières du pivot qui conduisent à des cubiques dégénérées.

Si le pivot est l'un des points fixes de σ, I par exemple, les droites (IJ), (IK) et (IL) sont globalement σ-invariantes : $\mathcal{K}$ est dégénérée en la réunion de ces trois droites.

Si le pivot est l'un des sommets du triangle fondamental de σ, A par exemple, les droites d_A et d'_A sont globalement σ-invariantes et, pour tout point M de la droite (BC), on a $M^* = A$: $\mathcal{K}$ est dégénérée en la réunion de ces trois droites.

Si le pivot est aligné avec deux des points fixes de σ donc avec un sommet du triangle fondamental, I, J et A par exemple, sans être un de ces points, la droite AP est globalement σ-invariante donc $\mathcal{K}$ dégénére en la réunion de cette droite et d'une conique γ globalement σ-invariante. Cette conique passe donc par deux des sommets du triangle fondamental, nécessairement B et C puisque $\mathcal{K}$ est circonscrite. Les droites (PK) et (PL) ne passent alors par aucun des sommets du triangle fondamental : les points K et L sont sur $\mathcal{K}$ donc sur γ qui admet en ces points les droites (PK) et (PL) pour tangentes.

Pour toute autre position du pivot, la droite (PI) ne passe par aucun sommet du triangle fondamental, donc I est sur $\mathcal{K}$ avec la droite (PI) pour tangente.

De même la droite $d = (PP^*)$ ne passe par aucun sommet du triangle fondamental, son intersection avec la conique propre $\sigma(d)$ se réduit à P et P^*, ce qui conduit à deux résultats intéressants :

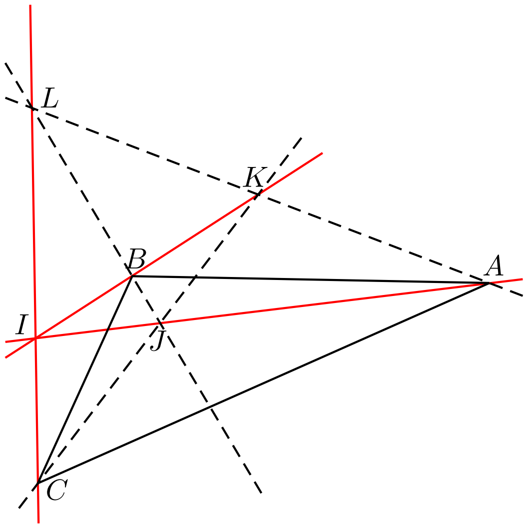

FIG. 2.1 – Cubique dégénérée de pivot I

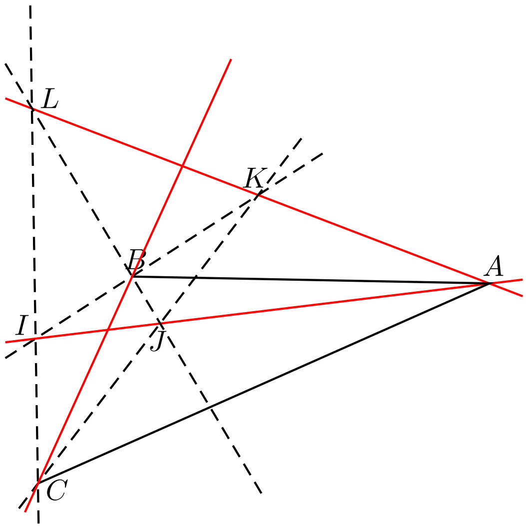

FIG. 2.2 – Cubique dégénérée de pivot A

– la droite d ne passe par aucun des points fixes de σ ;
– la droite d a une intersection double avec $\mathcal{K}$ en P : elle est tangente à $\mathcal{K}$ en P.

On connaît 5 points de $\mathcal{K}$ et la tangente en ces points : I, J, K, L et P avec les tangentes respectives (PI), (PJ), (PK), (PL) et (PP^*) : de P on peut mener 6 tangentes à $\mathcal{K}$, la tangente en P lui-même comptant pour 2 tangentes confondues.

La cubique $\mathcal{K}$ est donc de sixième classe, elle est donc non dégénérée et n'admet ni point double ni rebroussement.

2.2 Faisceau défini par un point

Sur l'isocubique $\mathcal{K}$ à pivot P, nous connaissons 9 points : les sommets du triangle fondamental, les points fixes de σ, le pivot P et son conjugué P^*.

Si Q est un point de la droite (PP^*), l'isocubique de pivot Q contient également ces neuf points, qui ne définissent pas une cubique unique mais le faisceau des isocubiques à pivot sur la droite (PP^*). Pour particulariser $\mathcal{K}$ dans ce faisceau il faut donner une condition supplémentaire, par exemple la tangente

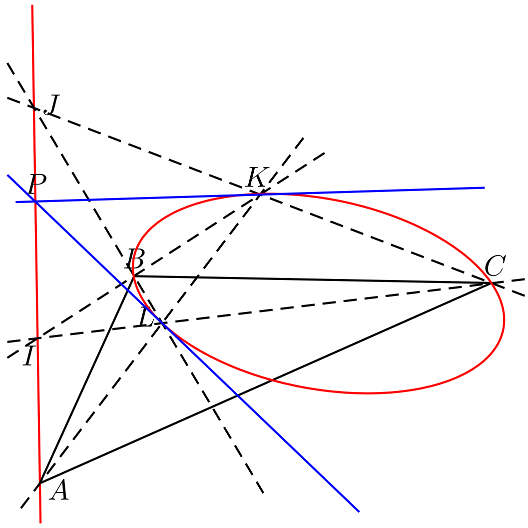

FIG. 2.3 – Cubique dégénérée de pivot P sur la droite (IJ)

(PP^*) en P.

2.3 Points particuliers d'une cubique à pivot

Les sommets du triangle fondamental sont des points simples de $\mathcal{K}$ qui recoupe (BC) en un troisième point A' ; par suite P, A' et $\sigma(A') = A$ sont alignés : A' est le pied de la cévienne de P issue de A, nous le noterons désormais P_A.

De même la droite $d = (AP^*)$, définie si P n'est pas sur (BC), est sécante à $\mathcal{K}$ en A, P^* et un troisième point Q ; $\sigma(d) = (AP)$ est sécante à $\mathcal{K}$ en A, P et P_A et Q^* est un de ces points.

- $Q^* = A$ conduirait à Q sur (BC) ; $Q = B$ imposerait P^* sur (AB) donc $P = C$, ce qui n'est pas ; de même $Q = C$ est impossible ; enfin $Q = P_A$ fournirait P^* sur $(AP_A) = (AP)$ ce qui n'est pas ;
- $Q^* = P$ conduirait à $Q = P^*$ donc A, P et P^* seraient alignés, ce qui n'est pas.

On a donc $Q^* = P_A$ donc $Q = A$: la droite (AP^*) a un contact double en A avec $\mathcal{K}$, c'est la tangente en A à $\mathcal{K}$.

Si P est sur (BC), alors $P^* = A$ et le raisonnement précédent ne convient plus. Remarquons que le faisceau $\mathcal{D}_P$ qui est transformé, dans le cas général, en le faisceau de coniques à point de base A, B, C et P^* ne peut plus être défini de cette façon. Dans ce cas $\sigma(\mathcal{D}_P)$ est le faisceau des coniques circonscrites tangentes en A à $\sigma(AP)$.

Soit P' le point d'intersection de la droite $\sigma(AP)$ avec (BC).

- $\mathcal{K}$ est sécante à (BC) en B, C et P donc P' n'est pas sur $\mathcal{K}$;
- pour tout point M de $\sigma(AP)$ autre que A et P', M^*est un point de (AP) autre que A et P ; or $(AP) = (PP^*)$ est la tangente en P à $\mathcal{K}$ et ne la coupe qu'en A et P : M n'appartient pas à $\mathcal{K}$.

La droite $\sigma(AP)$ est sécante à $\mathcal{K}$ en $A = P^*$ seulement ; cette intersection est donc triple : le point A est d'inflexion sur $\mathcal{K}$ avec $\sigma(AP)$ pour tangente.

Les tangentes à $\mathcal{K}$ aux sommets du triangle fondamental concourent en P^*.

Si P n'est pas sur un des côtés du triangle, cette condition détermine parfaitement ces tangentes et, de P^* on mène à $\mathcal{K}$ six tangentes en les points : A, B, C, P et P^* lui-même, tangente à compter double.

Si P est sur un des côtés du triangle, P^* est le sommet opposé, point d'inflexion de $\mathcal{K}$ avec pour tangente la droite $\sigma(PP^*)$. De P^* on mène à $\mathcal{K}$ six tangentes en les points : A, B, C, P, la tangente au sommet inflexionnel à compter triple.

On peut donc donner actuellement 12 points de la cubique, les tangentes en 8 d'entre eux, et deux polaires : celle de P qui est la conique circonscrite à $IJKLP$, celle de P^* qui est la conique circonscrite à $ABCPP^*$ lorsque P est hors des côtés de ABC, la conique dégénérée en la réunion des droites (BC) et $\sigma(AP)$ sinon.

2.4 Récréation

Soit X un point de la cubique $\mathcal{K}$, les droites (AX) et (AX^*) sont images l'une de l'autre par σ et recoupent $\mathcal{K}$ en deux points conjugués X_A et X_A^*, et l'on définit de même, par permutation, X_B, X_B^*, X_C et X_C^*.

On a donc trois triangles inscrits dans $\mathcal{K}$, ABC et $X_AX_BX_C$ sont en perspective de centre X, ABC et $X_A^*X_B^*X_C^*$ en perspective de centre X^*, $X_AX_BX_C$ et $X_A^*X_B^*X_C^*$ en perspective de centre P.

Les droites (PX_A), (BX) et (P_BA) recoupent $\mathcal{K}$ en X_A^*, X_B et C respectivement, les points P, B et P_B d'une part, X_A, X et A d'autre part, sont alignés ; par suite les points X_A^*, X_B et C sont également alignés. Par permutation, on montre cinq autres alignements analogues, et l'on obtient :

Les droites $(X_BX_C^*)$ et $(X_CX_B^*)$ sont sécantes en A, $(X_CX_A^*)$ et $(X_AX_C^*)$ sont sécantes en B, $(X_BX_A^*)$ et $(X_AX_B^*)$ sont sécantes en C.

Soient $\tilde{X}$ et $\tilde{X}^*$ les tangentiels respectifs de X et X^*, on établit les alignements suivants :
– les points P, X et X^* sont alignés, leurs tangentiels P^*, $\tilde{X}$ et $\tilde{X}^*$ également ;
– les points A, X et X_A sont alignés, leurs tangentiels P^*, $\tilde{X}$ et $\tilde{X}_A$ également ;
– les points A, X^* et X_A^* sont alignés, leurs tangentiels P^*, $\tilde{X}^*$ et $\tilde{X}_A^*$ également.
et les alignements analogues par permutations, d'où :

Les points X, X_A^*, X_B^* et X_C^* d'une part, X^*, X_A, X_B et X_C d'autre part, ont même tangentiel.

Le quadrilatère XX_ABC est inscrit dans $\mathcal{K}$, les côtés opposés (BC) et (XX_A) recoupent $\mathcal{K}$ en P_A et A et la droite (P_AA) reoupe $\mathcal{K}$, en P qui est donc le corésiduel des points X, X_A, B et C. On a des résultats analogues par permutations d'où :

Le pivot P est le corésiduel commun des six quadruplets (X, X_A, B, C), (X, X_B, C, A), (X, X_C, A, B), (X^*, X_A^*, B, C), (X^*, X_B^*, C, A) et (X^*, X_C^*, A, B) de points de $\mathcal{K}$.

2.5 Construction de la tangente

Soit M un point de $\mathcal{K}$ et Q le conjugué harmonique de P par rapport à M et M^* : Q est sur Γ_P qui admet les tangentes respectives (PP^*) en P et (QQ^*) en Q. Ces tangentes se coupent en U, pôle de (MM^*) par rapport à Γ_P : U^*, conjugué de U par rapport à Γ_P est sur (MM^*) et la conique $\gamma = \sigma(MM^*)$ passe par P^*, Q^* et U.

Ecrivons alors les égalités de birapport :

– $(AM^*, AM, AP^*, AU) = (AM, AM^*, AP, AU^*)$ car σ induit une involution sur le faisceau $\mathcal{D}_A$;
– $(AM, AM^*, AP, AU^*) = (P^*M, P^*M^*, P^*P, P^*U^*)$ car M, M^*, P et U^* sont alignés ;
– $(P^*M, P^*M^*, P^*P, P^*U^*) = (P^*M^*, P^*M, P^*U^*, P^*P)$ par propriété usuelle du birapport.

Comme $(P^*P) = (P^*U)$, il vient $(AM^*, AM, AP^*, AU) = (P^*M^*, P^*M, P^*U^*, P^*U)$ avec A, M, M^*, P^* et U sur la conique γ : la tangente en P^* à γ est (P^*U^*). De même la tangente en Q^* à γ est (Q^*U^*) : la polaire de U^* par rapport à γ est (P^*Q^*).

Nous avons vu que les tangentes à $\mathcal{K}$ en M et M^* sont sécantes en T avec T^* sur (MM^*). M et M^* sont donc deux points de la polaire γ_T de T par rapport à $\mathcal{K}$, P et Q sont harmoniquement conjugués par rapport à M et M^* donc par rapport à γ_T et Q appartient à la polaire mixte $\delta_{P,T}$ ou encore T et Q sont conjugués par rapport à la polaire γ_P. Cette dernière polaire est connue, il s'agit de Γ_P, elle appartient au faisceau $\mathcal{F}$.

On a vu que Q est sur Γ_P, sa polaire est la tangente (QQ^*), et T est aligné avec Q et Q^*.

Ecrivons alors les égalités de birapport :

- $(P, T^*, M^*, M) = (CP, CT^*, CM^*, CM) = (CP^*, CT, CM, CM^*)$ car σ induit une involution sur le faisceau $\mathcal{D}_C$;
- $(CP^*, CT, CM, CM^*) = (UP^*, UT, UM, UM^*)$ car les six points sont sur la cubique γ ;
- $(UP^*, UT, UM, UM^*) = (UP, UQ, UM, UM^*) = -1$ car on ne fait que changer la dénomination des deux premières droites intervenant dans ces birapports.

On a finalement $(P, T^*, M^*, M) = -1$ et T^* est le conjugué harmonique de P par rapport à M et M^*, soit $T^* = Q$.

PROPOSITION 2.5.1
Etant donnée une isocubique $\mathcal{K}$ à pivot P, les tangentes à $\mathcal{K}$ en deux points M et M^* sont sécantes en T tel que T^* soit le conjugué harmonique de P par rapport à M et M^*.

2.6 Autres caractérisations des isocubiques à pivot

Rappel : pour tout point M, la tangente en M à la conique Γ_M du faisceau $\mathcal{F}$ est la droite (MM^*).

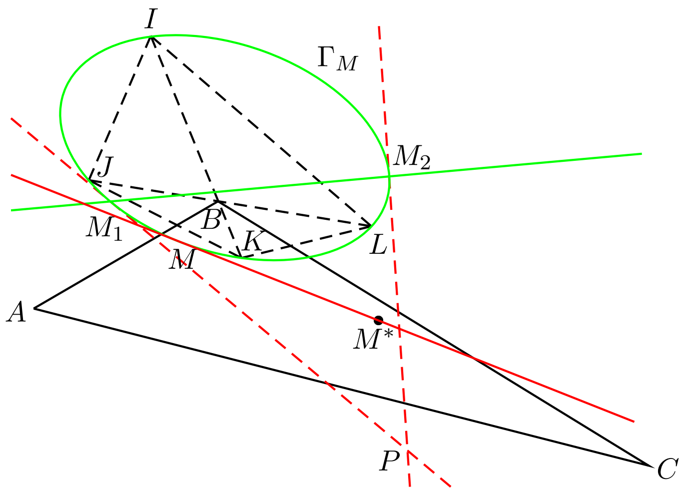

FIG. 2.4 – Utilisation du faisceau $\mathcal{F}$

Les propriétés suivantes sont donc équivalentes :

- P, M et M^* sont alignés ;
- la tangente en M à Γ_M passe par P ;
- la polaire de P par rapport à Γ_M passe par M.

On en déduit :

PROPOSITION 2.6.1
L'isocubique de pivot P est le lieu des intersections des coniques du faisceau $\mathcal{F}$ avec les polaires respectives de P par rapport à ces coniques.

2.7 Cubiques circulaires

Dans ce paragraphe, nous nous interessons aux isocubiques circulaires qui passent par les points cycliques Ω et Ω'.

Si Ω est un point fixe de σ, la transformation du second ordre est définie de manière unique. Les isocubiques passent nécessairement par Ω, elles sont circulaires **SSI** Ω' et Ω'^* sont sur la cubique : elles forment le faisceau d'isocubiques à pivots sur la droite $(\Omega'\Omega'^*)$.

Si Ω n'est pas un point fixe de σ, ou bien $\Omega^* = \Omega'$ et alors σ est l'isogonalité, cas que nous traiterons dans le paragraphe suivant, ou bien les quatre points Ω, Ω^*, Ω' et Ω'^* sont distincts. Il n'y a alors qu'une isocubique circulaire : le pivot est l'intersection P des droites $(\Omega\Omega^*)$ et $(\Omega'\Omega'^*)$. Remarquons que si les points fixes de σ sont réels, Ω et Ω' d'une part, Ω^* et Ω'^* d'autre part, sont conjugués par rapport au plan réel et le point P est réel.

La droite $(\Omega^*\Omega'^*)$ recoupe d_∞ en Q' et le troisième point à l'infini de $\mathcal{K}$ est le conjugué harmonique Q de Q' par rapport aux points à l'infini de $\mathcal{C}_\sigma$ (voir au chapitre 5 l'étude des asymptotes des isocubiques). Les points Q^* et Q'^* sont donc diamétralement opposés sur $\mathcal{C}_\sigma$, Q, Q', Q^* et Q'^* sont réels dès que P est réel. Enfin, si T est le conjugué harmonique de P par rapport à Q et Q^*, c'est-à-dire le symétrique de P par rapport à Q^*, la tangente à $\mathcal{K}$ en P (l'asymptote non cyclique) passe par T^* et est parrallèle à (PQ^*).

2.8 Cubiques circulaires isogonales

Pour une cubique isogonale circulaire, le pivot est en particulier aligné avec les points isogonaux Ω et Ω' donc sur la droite de l'infini. Réciproquement tout point à l'infini est aligné avec les points cycliques donc définit une cubique isogonale circulaire.

Les cubiques isogonales circulaires pivotales forment un faisceau.

La cubique admet donc une asymptote non cyclique, sa tangente au pivot P, *id est* la droite (PP^*) avec P^* sur le cercle circonscrit à ABC. Le point P^* est donc le point à distance finie en lequel la cubique est sécante à son asymptote non cyclique. On connaît donc les six points d'intersections de la cubique et du cercle circonscrit : le point P^*, les sommets du triangle fondamental, les points cycliques.

Remarquons que, si P est le point à l'infini de l'un des côtés du triangle fondamental, (BC) par exemple, la cubique admet un point d'inflexion en le sommet opposé A avec la droite isogonale de (AP) pour tangente d'inflexion. Mais (AP) est parallèle à (BC) donc perpendiculaire à la hauteur (AH) et son isogonale est la perpendiculaire en A à (AO) : la cubique et le cercle circonscrit sont tangents en A. Les points A et P^* sont confondus mais fournissent une intersection double entre la cubique et le cercle circonscrit ; on a toujours les six points d'intersection des deux courbes.

Les tangentes aux points cycliques, qui sont conjugués, sont sécantes au point F_s, foyer singulier de la cubique, isogonal du conjugué harmonique de P par rapport aux points cycliques.

Les points à l'infini P et F_s^* définissent donc des directions de droites orthogonales : les points P^* et F_s sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à ABC.

Une cubique circulaire, isogonale à pivot, n'est focale que dans le cas où F_s est l'un des sommets du triangle fondamental, F_s^* est le point à l'infini du côté opposé, P est le point à l'infini de la hauteur issue du sommet F_s.

L'isogonalité est caractérisée par l'une des propriétés équivalentes suivantes :
- les points fixes sont les centres des cercles inscrit et exinscrits dans le triangle fondamental ;
- le triangle fondamental est le triangle orthique de l'un quelconque des quatre triangles déterminés par les points fixes ;
- le quadrilatère des points fixes est orthocentrique.

Si l'on particularise un des points fixes, I par exemple, on note I_a, I_b et I_c les autres points fixes situés respectivement sur les droites (IA), (IB) et (IC).

Les points A, B, I_a et I_b sont cocycliques. La puissance de I par rapport au cercle qui les contient est $\overline{IA}.\overline{II_a} = \overline{IB}.\overline{II_b}$, et par permutation circulaire des points A, B et C, cette puissance est aussi $\overline{IC}.\overline{II_c}$: il existe une inversion $\mathfrak{I}$ de pôle I qui échange A et I_a, B et I_b, C et I_c.

Soit $\mathcal{K}$ une cubique isogonale circulaire de pivot P à l'infini. Pour tout point M de $\mathcal{K}$, la droite (IM) recoupe la cubique en M' et l'on définit un faisceau de cubiques passant par les 7 points I, A, I_a, P, Ω, Ω', M, et tangentes en I à (IP). Les cubiques de ce faisceau ont un neuvième point commun (elles ont déjà 8 points communs car elles ont un contact en I).

La cubique $\mathcal{K}$ appartient au faisceau ainsi que la cubique dégénérée en la réunion de d_∞ et des droites (IM) et (II_a) (qui passe par A) : le neuvième point commun aux cubiques du faisceau est donc M'.

Le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle MAI_a définit, par réunion avec la droite (IP), une cubique dégénérée qui appartient également au faisceau donc passe par M' qui n'est pas sur la droite (IP) donc appartient à $\mathcal{C}$: les points A, I_a, M et M' sont cocycliques. La puissance de I par rapport à $\mathcal{C}$ est donc $\overline{IA}.\overline{II_a} = \overline{IM}.\overline{IM'}$ et l'inversion $\mathfrak{I}$ échange M et M'.

Proposition 2.8.1
Il existe quatre inversions, ayant pour pôles respectifs les points fixes de l'isogonalité, par lesquelles une cubique circulaire isogonale est invariante.

Si M est l'un des quatre points de $\mathcal{K}$ en lesquels la tangente passe par I, on a $M' = M$: M est invariant par I donc sur le cercle d'inversion.

Chacun des cercles d'inversion coupe la cubique en 4 points non cycliques qui sont les sommets du quadrilatère de tangentiel le pôle de l'inversion considérée.

Soient M un point de $\mathcal{K}$ et $M' = i(M)$. Tout cercle du faisceau à points de base M et M' est invariant par $\mathfrak{I}$ car orthogonal au cercle d'inversion ; il existe un et un seul cercle de ce faisceau tangent en M à $\mathcal{K}$, on le notera $\mathcal{C}_M$. Alors$i(\mathcal{C}_M) = \mathcal{C}_M$ et $i(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ sont tangents en $i(M) = M'$: la cubique $\mathcal{K}$ est l'enveloppe des cercles bitangents $\mathcal{C}_M$.

Soit $\mathcal{P}$ le lieu du centre O_M du cercle $\mathcal{C}_M$. Soient O_M et O_N deux points de $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}_N$ sont orthogonaux au cercle d'inversion donc leur axe radical passe par I et est perpendiculaire à la droite des centres $(O_M O_N)$. Lorsque N tend vers M, cette droite tend vers la tangente en O_M à $\mathcal{P}$, alors que l'axe radical de $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{C}_N$ tend vers la droite (IM) : la tangente à $\mathcal{P}$ en O_M est la perpendiculaire abaissée de O_M sur (IM), c'est à dire la médiatrice de la corde $[MM']$ déterminée par le contact de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{C}_M$.

Lorsque M tend vers I, la droite (IM) tend vers la tangente (IP) à $\mathcal{K}$ en I, et M' tend vers le point à l'infini sur cette tangente (IP), soit P. Le cercle $\mathcal{C}_M$ a pour limite $\mathcal{C}_I$ dégénéré en la réunion de (IP) et de la droite de l'inifini. Le centre O_I de $\mathcal{C}_I$ est donc le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à (IP), soit $O_I = F_s^*$, et la tangente en O_I à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[IP]$ c'est à dire d_∞.

La courbe $\mathcal{C}_I$ est tangente à d_∞ au point F_s^*.

Soit Q un point à l'infini et (QO_M) une tangente menée de Q à $\mathcal{P}$, autre que d_∞. Le cercle $\mathcal{C}_M$ est tangent à $\mathcal{K}$ en M et M' alignés sur la perpendiculaire abaissée de I sur (QO_M). Le point Q fixe la direction de la droite (QO_M) donc la droite (IM) et le couple (M, M') est défini de facon unique. De Q, on ne peut mener que deux tangentes à $\mathcal{P}$ qui est donc une courbe de seconde classe, tangente à la droite de l'infini : c'est une parabole.

Le lieu des centres des cercles enveloppants la cubique $\mathcal{K}$ est une parabole dont la direction de l'axe est définie par le point à l'infini F_s^* et la direction de la directrice par P : elle est parallèle à l'asymptote non cyclique de $\mathcal{K}$.

Pour tout point M de $\mathcal{K}$ autre que les points cycliques, on connaît les 6 points d'intersection de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{C}_M$, ce sont les points cycliques, les points de contacts M et M' (intersections doubles) : $\mathcal{C}_M = \mathcal{C}_N$ **SSI** $N = M$ ou $N = M'$.

Par un point non cyclique de $\mathcal{K}$ il passe un cercle et un seul de la famille des cercles enveloppants.

Le cercle $\mathcal{C}_\Omega$ et $\mathcal{K}$ ont la même tangente en Ω qui est (ΩF_s). La tangente à $\mathcal{P}$ en O_Ω est la perpendiculaire abaissée de O_Ω sur $(I\Omega)$; cette droite est isotrope, ses perpendiculaires concourent en Ω et la tangente à $\mathcal{P}$ en O_Ω est (ΩO_Ω).
D'autre part le centre O_Ω du cercle $\mathcal{C}_\Omega$ est sur les tangentes aux points cycliques : les points F_s, O_Ω et O_Ω sont alignés et la tangente à $\mathcal{P}$ en O_Ω est $(F_s\Omega)$. De même la tangente à $\mathcal{P}$ en $O_{\Omega'}$ est $(F_s\Omega')$.
La conique dégénérée en la réunion des droites $(F_s\Omega)$ et $(F_s\Omega')$ est donc bitangente à la la parabole $\mathcal{P}$; cette conique passes par les points cycliques, c'est le cercle de centre F_s et de rayon nul : son centre est le foyer de la parabole.

Le foyer de la parabole $\mathcal{P}$ est le foyer singulier de la cubique $\mathcal{K}$.

2.9 Cubiques à centres

On étudie ici une isocubique $\mathcal{K}$ de pivot P admettant un centre de symétrie O.

Si d une asymptote de $\mathcal{K}$, la symétrique d' de d par rapport à O est une autre asymptote de $\mathcal{K}$ parallèle à d. Le point à l'infini de d et d', point de $\mathcal{K}$, ne peut admettre deux tangentes distinctes puisque $\mathcal{K}$ est de sixième classe sans point double : d et d' sont confondues et O est sur d.

Les asymptotes de l'isocubique centrale concourent au centre de symétrie.

La polaire de O par rapport à $\mathcal{K}$ passe donc par les trois points à l'infini de $\mathcal{K}$, elle contient 3 points alignés donc dégénère. Le centre de symétrie O est un point d'inflexion de $\mathcal{K}$, sa polaire dégénère en la réunion de la tangente en O à $\mathcal{K}$ et de d_∞.

Le centre de symétrie de $\mathcal{K}$ est un point d'inflexion.

La droite (PO) est sécante à $\mathcal{K}$ en les trois points P, O et O^*, puisque P est le pivot de $\mathcal{K}$, en P, O et P' symétrique de P par rapport à O puisque ce point est centre de symétrie. Donc P et O^* sont symétriques par rapport à O.

Le pivot P de $\mathcal{K}$ est le symétrique, par rapport au centre O, de son conjugué O^*.

Soit P_∞ un point à l'infini de $\mathcal{K}$, P_∞^* son conjugué, point de $\mathcal{C}_\sigma$; P, P_∞ et P_∞^* sont alignés, leurs tangentiels également. Le tangentiel de P est P^*, celui de P_∞ est O, donc le tangentiel de P_∞^* est le troisième point de $\mathcal{K}$ sur (OP^*) : le symétrique Q de P^* par rapport à O.

P^* est le tangentiel de P, A, B et C : Q est le tangentiel des symétriques de des points par rapport à O qui sont donc O^* ainsi que les conjugués des trois points à l'infini de $\mathcal{K}$. Les symétriques de A, B et C par rapport à O sont sur la conique $\mathcal{C}_\sigma$: O est le centre de cette conique.

Réciproquement, considérons la cubique $\mathcal{K}$ de pivot P_σ symétrique par rapport à O_σ, centre de $\mathcal{C}_\sigma$, de son conjugué O_σ^*.

Notons A', B' et C' les symétriques de A, B et C par rapport à O_σ. A' est sur la droite(AO_σ) donc A'^* est sur (AO_σ^*) ; A' est sur $\mathcal{C}_\sigma$ donc A'^* est à l'infini : A'^* est le point à l'infini de (AO_σ^*). La droite $(A'P)$ est symétrique de (AO^*) par rapport à O_σ, elle lui est parallèle, son point à l'infini est A'^* : A' et A'^* sont des points de $\mathcal{K}$. De même $\mathcal{K}$ passe par B', B'^*, C' et C'^*.

La cubique $\mathcal{K}$ contient donc les couples (A, A'), (B, B'), $C, C')$ et (P, O_σ^*) de points symétriques par rapport à O_σ, elle passe également par les points O_σ, A'^*, B'^* et C'^* qui sont leurs propres symétriques par rapport à O_σ. Ces 12 points appartiennent donc à la cubique $\mathcal{K}'$ symétrique de $\mathcal{K}$ par rapport à O_σ : les deux cubiques sont dégénérérées ou identiques.

Il existe une unique isocubique pivotale à centre, son centre de symétrie est le centre de la conique $\mathcal{C}_\sigma$.

CHAPITRE 3

Cubiques sans pivot

3.1 Configuration fondamentale

Soient $\mathcal{K}$ une isocubique sans pivot non dégénérée, P un point distinct des points fixes de σ, $\mathcal{K}_P$ l'isocubique de pivot P. Les deux cubiques sont sécantes en 9 points dont A, B et C : les 6 autres se répartissent donc en trois couples de points conjugués (P_1, P_1^*), (P_2, P_2^*) et $P_3, P_3^*)$.

En fait le conjugé de A est

- pour $\mathcal{K}$, l'intersection de la cubique avec la droite (BC) ;
- pour $\mathcal{K}_P$, le pied de la cévienne (AP), intersection de la cubique avec la droite (BC).

Ce sont les seuls couples de points conjugués sur $\mathcal{K}$ qui soient alignés avec P puisque les points d'un tel couple doivent appartenir à $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$. On a les cas particuliers suivants :

- Si le point P est sur $\mathcal{K}$, un de ces couples est bien évidemment (P, P^*), et il ne subsiste que deux couples (P_1, P_1^*), (P_2, P_2^*) de points conjugués sur $\mathcal{K}$ qui soient alignés avec P tout en étant distincts de P.
- Si la cubique passe par l'un des points fixes de σ, I par exemple, l'un de ces couples est (I, I).

L'un des couples est constitué

Le faisceau $\mathcal{D}_P$ des droites concourantes en P a pour conjugué le faisceau $\mathcal{F}_{P^*}$ des coniques circonscrites à $ABCP^*$. Une droite d de $\mathcal{D}_P$ recoupe $\mathcal{K}$ en M et N, la conique γ conjuguée de d recoupe $\mathcal{K}$ en M^* et N^*, et l'on note $d^* = (M^*N^*)$; cette droite recoupe $\mathcal{K}$ en P', corésiduel de $ABCP^*$.

Lorsque $d = (PP_1)$ alors M et N sont P_1 et P_1^*, donc M^* et N^* aussi : $d^* = d$ et $P' = P$: si M et N sont alignés avec P alors M^* et N^* le sont aussi, et, avec la proposition 1.4.5 page 7, P^*, M et N^* d'une part, P^*, M^* et N d'autre part sont alignés.

Proposition 3.1.1
Si les trois points P, M, N d'une isocubique sans pivot sont alignés, alors (P, M^*, N^*), (P^*, M, N^*), (P^*, M^*, N) sont des triplets de points alignés.

On peut donc définir une application ϕ de $\mathcal{D}_P$ dans lui-même par $(PM) \mapsto (PM^*)$: cette application est involutive, c'est une homograhie. Soit d une droite de $\mathcal{D}_P$ et γ la conique de $\mathcal{F}_{P^*}$ conjuguée de $\phi(d)$, l'application $d \mapsto \gamma$ est une homographie de $\mathcal{D}_P$ dans $\mathcal{F}_{P^*}$: le lieu des intersections de d avec γ est donc une cubique $\mathcal{K}'$ contenant $\mathcal{K}$ donc $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$; la cubique est définie par un point P et une involution sur le faisceau $\mathcal{D}_P$.

3.2 Tangentiel d'un point

Si, dans la configuration fondamentale, le point M tend vers P, alors N tend vers le tangentiel T de P : on a une situation particulière de trois points alignés et l'on en déduit l'alignement des triplets de points (P, P^*, T^*), et (P^*, P^*, T).

PROPOSITION 3.2.1
Pour tout point P d'une isocubique non pivotale, P et P^* ont même tangentiel, le conjugué du troisième point d'intersection de la droite (PP^*) avec la cubique.

Si P est un point d'inflexion de la cubique, on a de plus $T = P$ donc le troisième point d'intersection de la droite (PP^*) avec la cubique et $T^* = P^*$.

PROPOSITION 3.2.2
Pour tout point P d'inflexion d'une isocubique non pivotale, la tangente à la cubique en P^* est la droite (PP^*).

3.3 Involution fondamentale en un point

Soit P un point du plan et ϕ une involution sur $\mathcal{D}_P$, on définit une homographie f de $\mathcal{D}_P$ dans $\mathcal{C}_{P^*}$ par : $f(d) = \gamma'$ où γ' est la conique isogonale de $d' = \phi(d)$. Le lieu des intersections de d et γ' est donc une cubique $\mathcal{K}$.

L'homographie f vérifie $f(d') = \gamma$ où γ est la conique isogonale de $d = \phi(d')$; si l'on note M et N les points de $\mathcal{K}$ intersections de d et γ', les intersections de d' et γ sont alors M^* et N^* et ce sont aussi des points de $\mathcal{K}$: la cubique $\mathcal{K}$ est σ-invariante donc circonscrite à ABC.

Les points P, M et N d'une part, P, M^* et N^* d'autre part, sont alignés ; la proposition 3 permet de conclure l'alignement de P^*, M^* et N d'une part, P^*, M et N^* d'autre part.

Prenons $d = (PP^*)$, γ est la conique circonscrite à $ABCPP^*$ sécante à d' en $M^* = P$ et $N^* = T$, alors que d est sécante à γ' en $M = P^*$ et $N = T^*$. La cubique $\mathcal{K}$ passe donc par P et la droite d' est sécante à $\mathcal{K}$ en P, $M^* = P$, $N^* = T$, elle est donc tangente en P à $\mathcal{K}$ et T est le tangentiel de P ; d' et $\mathcal{K}$ sont tangentes en P, par isogonalité γ' et $\mathcal{K}$ sont tangentes en P^*. Or γ' est circonscrite à ABC, la droite (PP^*) la recoupe en T^*, la tangente à γ' en P^* est dont (P^*T) ; T est également le tangentiel de P^*.

Les tangentes à $\mathcal{K}$ en les points P et P^* concourent au point T de $\mathcal{K}$ dont le conjugué T est le troisième point de $\mathcal{K}$ sur (PP^*).

La cubique $\mathcal{K}$ est donc connue par 9 conditions : 7 points A, B, C, P, P^*, T, T^* ; 2 tangentes (PT) en P et (P^*T) en P^*. Ces conditions sont déterminées par P et ϕ.

Si M sur $\mathcal{K}$ est tel que P, M et M^* sont alignés, on a $d = (PM) = (PM^*) = d'$ et d est une droite fixe de ϕ. Réciproquement, soit d une droite fixe de ϕ d'où $\gamma = \gamma'$; les intersections de d avec γ' d'une part, de d' avec γ d'autre part, fournissent deux points seulement de $\mathcal{K}$, ce sont les intersections de d avec γ, il s'agit donc de deux points conjugués ; on les notera Φ_1 et Φ_1^* sur l'une des droites fixes d_1 et Φ_2 et Φ_2^* sur l'autre droite fixe d_2.

Lorsque d vient en d_1, M et N^* se confondent en Φ_1 d'une part, M^* et N en Φ_1^* d'autre part : les tangentes en Φ_1 et Φ_1^* à $\mathcal{K}$ sont les positions limites des droites (MN^*) et (M^*N). Ces deux dernières droites font partie du faisceau $\mathcal{D}_{P^*}$, donc les tangentes en Φ_1 et Φ_1^* aussi : ce sont les droites $(P^*\Phi_1)$ et $(P^*\Phi_1^*)$.
Les tangentes à $\mathcal{K}$ en les points conjugués Φ_1 et Φ_1^* concourent au pointP^* de $\mathcal{K}$ dont le conjugué P est le troisième point de $\mathcal{K}$ sur $(\Phi_1\Phi_1^*)$.

De P^* on mène donc à $\mathcal{K}$ les tangentes $(P^*\Phi_1)$ en Φ_1, $(P^*\Phi_1^*)$ en Φ_1^*, $(P^*\Phi_2)$ en Φ_2, $(P^*\Phi_2^*)$ en Φ_2^*, (P^*T) en P^* qui compte double : $\mathcal{K}$ est de classe 6, est non dégénérée, sans point double ni rebroussement.

La polaire de P^* par rapport à $\mathcal{K}$ est donc la conique γ_{P^*} circonscrite à $P^*\Phi_1\Phi_2\Phi_1^*\Phi_2^*$. Notons Φ_1' et Φ_2'

les conjugués harmoniques de P par rapport à Φ_1 et Φ_1^* d'une part, Φ_2 et Φ_2^* d'autre part ; Φ'_1 et Φ'_2 sont donc conjugués de P par rapport à γ_{P^*} : ils appartiennent à la polaire δ_{P,P^*} de P par rapport à γ_{P^*}, c'est à dire $\delta_{P,P^*} = (\Phi'_1\Phi'_2)$. Les divisions $(P, \Phi'_1, \Phi_1, \Phi_1^*)$ et $(P, \Phi'_2, \Phi_2, \Phi_2^*)$ sont harmoniques avec P, Φ_1, Φ_1^*, Φ_2 et Φ_2^* sur $\mathcal{K}$, donc Φ'_1 et Φ'_1 sont sur la polaire γ_P de P par rapport à $\mathcal{K}$; la polaire de P^* par rapport à γ_P est $\delta P^*, P = \delta_{P,P^*} = (\Phi'_1\Phi'_2)$, donc les tangentes à γ_P en Φ'_1 et Φ'_2 sont respectivement $(P^*\Phi'_1)$ et $(P^*\Phi'_2)$.

Revenons à l'étude de la figure constituée des points M, N, M^*, N^*. On note respectivement M' et N' les intersections de γ_P avec (PM) et (PM^*), X l'intersection de (MM^*) et (NN^*). Les divisions (P, M', M, N) et (P, N', M^*, N^*) sont harmoniques, les droites (MN^*) et (MN^*) concourent en P^* donc la polaire de P par rapport à (MN) et (M^*N^*) passe par P^*, X, M' et N' : ces quatre points sont alignés. Comme (MN^*) et (M^*N) concourent en P, la polaire de P^* par rapport à ces droites est (PX) et la division (P^*, X, M', N') est harmonique, donc P^* et X sont conjugués par rapport à γ_P et X appartient à $\delta_{P^*,P}$: le lieu du point X est la droite $(U'V')$ et la cubique $\mathcal{K}$ est σ-invariante sans pivot.

3.4 Isoubiques non pivotales dégénérées

Soit $\mathcal{K}$ une isocubique non pivotale dégénérée : elle contient une droite d.

Si cette droite ne passe par aucun sommet du triangle fondamental, $\sigma(d)$ est une conique circonscrite et $\mathcal{K} = d \cup \sigma(d)$; deux exemples importants de telles isocubiques sont $\mathcal{K}_\sigma = d_\infty \cup \mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{K}'_\sigma = d_\sigma \cup \mathcal{C}_c$. Si d passe par un des points fixes de σ, alors d et $\sigma(d)$ sont tangentes en ce point.

Si la droite d passe par un des sommets du triangle fondamental, disons A, $\sigma(d)$ est une autre droite passant par A contenue dans $\mathcal{K}$ qui dégénère donc en la réunion de trois droites.

3.5 Intersection avec les côtés du triangle fondamental

Prenons $d = (PA)$, γ est la conique dégénérée en $(AP^*) \cup (BC)$ sécante à d' en A^* sur (BC) et M^* sur (AP^*), alors que γ' est sécante à d en A et M avec P^*, A^* et M alignés.

On a la simplification des produits de birapports, valable pour des éléments quelconques :

$$(M, N, X, D)(N, P, Y, D)(P, M, Z, D) = (Y, X, N, M)(P, M, Z, Y)$$

On a alors, pour toute droite d de $\mathcal{D}_P$:

$$(PB, PC, PA^*, d)(PC, PA, PB^*, d)(PA, PB, PC^*, d) = (PB^*, PA^*, PC, PB)(PA, PB, PC^*, PB^*)$$

L'involution ϕ sur $\mathcal{D}_P$ échange (PA) et (PA^*), ainsi que (PB) et (PB^*), (PC) et (PC^*), d'où

$$(PB^*, PA^*, PC, PB) = (PB, PA, PC^*, PB^*) = (PA, PB, PC^*, PB^*)^{-1}$$

puis

$$(PB, PC, PA^*, d)(PC, PA, PB^*, d)(PA, PB, PC^*, d) = 1$$

Le théorème de Ménélaüs fournit l'alignement des points A^*, B^* et C^* pris sur les côtés du triangle ABC.

PROPOSITION 3.5.1
Une isocubique non pivotale est sécante aux côtés du triangle fondamental, en dehors des sommets, en trois points alignés.

DÉFINITION 3.5.1
On appelle droite radicielle d'une isocubique non pivotale la droite qui joint les points d'intersection, autres que A, B et C, de la cubique avec les côtés du triangle fondamental.
On appelle racine d'une isocubique non pivotale le pôle trilinéaire de sa droite radicielle.

Soit $\mathcal{K}$ une isocubique non pivotale de racine R, de droite radicielle d, on note, comme précédemment A^* B^* et C^* ses intersections avec les côtés de ABC, points alignés sur d et qui ne dépendent donc que de R. La droite (AA^*) recoupe $\mathcal{K}$ en A' et A'^* est le tangentiel commun de A et A^*. Sur le faisceau $\mathcal{D}_A$, on a les égalités de birapports :

- $(AR, AA^*, AB, AC) = -1$ par définition de la polaire trilinéaire d de R ;
- $(AR, AA', AB, AC) = (AR^*, AA'^*, AC, AB)$ par l'involution f_A induite par σ sur $\mathcal{D}_A$.

Or (AA^*) et (AA') représentent la même droite donc $(AR^*, AA'^*, AC, AB) = -1$ et la tangente (AA'^*) à $\mathcal{K}$ en A est la polaire de R^* par rapport à (AB) et (AC). Cette tangente ne dépend donc que de R.

Proposition 3.5.2
Les isocubiques non pivotales de même racine R constituent un faisceau.

Preuve : Ces isocubiques sont déterminées par 9 conditions : les points A, B, C, les tangentes en ces points, et les points A^*, B^*, C^* sur d qui ne déterminent pas une isoubique unique. Toute involution sur $\mathcal{D}_{A^*}$ qui admet d pour droite fixe définit en effet une cubique qui satisfait à ces 9 conditions.

□

On en déduit la propriété importante suivante :

Par un point M hors des côtés du triangle ABC il passe une unique isocubique non pivotale de racine R donnée.

3.6 La déférente pivotale

Considérons un point M de la cubique $\mathcal{K}$, T le tangentiel commun à M et M^*.

Soient N un autre point de la cubique et P le point en lequel la droite (MN) recoupe $\mathcal{K}$. Par configuration fondamentale M^* et N^* sont alignés avec P, P^*, M et N^* d'une part, P^*, M^* et N d'autre part sont alignés : les droites (MM^*) et (NN^*) sont sécantes en Q conjugué de P^* par rapport aux droites (PM) et (PM^*).

Lorsque N tend vers M sur $\mathcal{K}$, N^* tend vers M^* et l'intersection Q des droites droites (MM^*) et (NN^*) tend vers le point de contact m de MM^* avec la déférente pivotale. Comme (MN) tend alors vers la tangente à $\mathcal{K}$ en M, P tend vers T et P^* tend vers T^*.

Proposition 3.6.1
Pour tout point M d'une isocubique non pivotale, le contact de la droite (MM^*) avec la déférente pivotale a lieu au point m conjugué harmonique du troisième point d'intersection de (MM^*) avec la cubique.

Soient P un point quelconque du plan et d une droite passant par P. d est tangente à la déférente pivotale **SSI** il existe sur d un couple de points conjugués de $\mathcal{K}$. Il existe trois seuls couples de points conjugués de $\mathcal{K}$ alignés avec P : du point P on mène trois tangentes à la déférente pivotale. Toutefois lorsque la cubique passe par un des points fixes de la conjugaison, I par exemple, un de ces couples de points conjugués est (I, I) et la droite (PI) n'est plus nécessairement tangente à la déférente pivotale.

Proposition 3.6.2
La déférente pivotale d'une isocubique non pivotale qui ne passe pas par un des points fixes de la conjugaison est une courbe de troisième classe. La déférente pivotale d'une isocubique non pivotale qui passe par un des points fixes de la conjugaison est une courbe de seconde classe, c'est donc une conique.

Nous noterons $\mathcal{C}$ la déférente pivotale de l'isocubique $\mathcal{K}$.

Soit T un point d'intersection de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{C}$: il existe un point M sur $\mathcal{K}$ tel que (MM^*) soit tangente en T à $\mathcal{C}$, cette droite recoupe $\mathcal{K}$ en P conjugué harmonique de T par rapport à M et M^*. Le point T, qui est également sur $\mathcal{K}$, est donc l'un des points P, M ou M^*. Dans la division harmonique (M, M^*, P, T), T est identique à un des autres points donc à deux d'entre eux. Quitte à permuter M et M^*, on peut toujours supposer $T = M$. Du point I on mène les deux tangentes distinctes d_1 et d_2 à $\mathcal{C}$ donc I n'est pas sur la cubique pivotale. Par suite M et M^* sont distincts et il subsiste $T = M = P$. La droite (MM^*) a une intersection double avec (K) en M, elle lui est tangente en ce point. Les intersections de (K) et (C) sont donc des intersections doubles en des points de contact, la cubique et la conique ont six intersections donc trois points géométriques.

Le tangentiel commun à M et M^* est $T^* = M^*$ La tangente en M^* à la cubique à un contact double en M^* et simple en T^*, ici elle a donc un contact triple en M^* qui est un point d'inflexion. Si la déférente pivotale est de degré n, elle intersecte la cubique en $3n$ points en lesquels il y a contact, ce qui ne fournit que $\frac{3n}{2}$ points géométriquement distincts, isoconjugués des points d'inflexions de la cubique.

Proposition 3.6.3
La déférente pivotale $\mathcal{C}$ d'une isocubique non pivotale $\mathcal{K}$ qui ne passe pas par un des points fixes de la conjugaison, de classe 6, est une courbe du sixième degré tangente à la cubique en les conjugués de ses neuf points d'inflexion.

La déférente pivotale $\mathcal{C}$ d'une isocubique non pivotale $\mathcal{K}$ qui passe par un des points fixes de la conjugaison, donc de classe 4, est une conique tangente à la cubique en les conjugués de ses trois points d'inflexion.

3.7 Cubiques nodales

On définit l'isocubique par deux droites d_1 et d_2 passant par l'un des points fixes de σ, disons I.

Soit M un point de $\mathcal{K}$ sur d_1, en notant $d' = (IM^*) = \sigma(IM)$, la relation « (IM) et (IM^*) sont harmoniquement conjuguées par rapport à d_1 et d_2 » se réécrit « d_1 et d' sont harmoniquement conjuguées par rapport à d_1 et d_2 » ce qui fournit $d' = d_1$.

Si d_1 est une droite invariante par σ, c'est-à-dire contient un autre point fixe que I, la condition est réalisée par tout point de d_1 qui est alors contenue dans $\mathcal{K}$; la cubique dégénère en la réunion de d_1, qui passe par un des sommets du triangle fondamental, et d'une conique γ, invariante par σ et qui passe par les deux autres sommets du triangle fondamental.

Si d_1 est une droite non invariante par σ, c'est-à-dire ne contient aucun autre point fixe que I, la condition n'est jamais réalisée et par suite l'intersection de d_1 avec la cubique se résume au seul point I qui est alors une intersection triple : I est un nœud de $\mathcal{K}$ admettant d_1 pour tangente en ce point ; par symétrie, la seconde tangente en I est d_2.

Proposition 3.7.1
La conique pivotale d'une isocubique nodale de point double I est définie par les cinq tangentes (JK), (KL), (LJ) ainsi que d_1 et d_2 les tangentes au point double.

Une cubique nodale est de quatrième classe et ne possède que trois points d'inflexion alignés. On en déduit, pour les contacts de la cubique et de sa conique pivotale, le résultat suivant :

Proposition 3.7.2
Il existe sur une cubique nodale trois points M en lesquels elle a un contact avec sa conique pivotale, la tangente commune étant la droite (MM^*).
Ces trois points sont sur une conique circonscrite, leurs conjugués sont les points d'inflexion de la cubique.

3.8 Cubiques circulaires non isogonales

Dans ce paragraphe, nous noterons Ω et Ω' les points cycliques et nous restreignons la conjugaison à ne pas être l'isogonalité et à ne pas avoir un des points cycliques comme point fixe..

Une isocubique circulaire passe par les sept points A, B, C, Ω, Ω', Ω^* et Ω'^*.

Soit P_∞ le troisième point à l'infini de l'isocubique $\mathcal{K}$. Les points Ω, Ω' et P_∞ sont alignés donc les points Ω^*, Ω'^* et P_∞ aussi, ainsi que les points Ω, Ω'^* et P_∞^* d'une part et les points Ω^*, Ω' et P_∞^* d'autre part. Les points P_∞ et P_∞^* sont donc les intersections de $(\Omega\Omega')$ et $(\Omega^*\Omega'^*)$ d'une part, de $(\Omega\Omega'^*)$ et $(\Omega^*\Omega')$ d'autre part. Ils ne dépendent que de l'isoconjugaison. Ils définissent donc une cubique unique ou un faisceau de cubiques.

Notons $\mathcal{C}_\sigma$ la conique circonscrite isoconjuguée de la droite de l'infini et d_σ la droite isoconjuguée du cercle circonscrit $\mathcal{C}_c$ au triangle fondamental. Les réunions $\mathcal{K}_1$ de $\mathcal{C}_\sigma$ et de la droite à l'infini d'une part, $\mathcal{K}_2$ de d_σ et de $\mathcal{C}_c$ d'autre part, sont des isocubiques dégénérées circulaires. Les isocubiques pivotales ne dégénérent pas en la réunion d'une droite et d'une conique circonscrite, ces cubiques $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ sont non pivotales et les isocubiques circulaires non pivotales non isogonales constituent un faisceau.

Les points P_∞ et P_∞^* sont donc sur $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ par conséquent P_∞ est le point à l'infini de d_σ, P_∞^* est la quatrième intersection de $\mathcal{C}_\sigma$ et de $\mathcal{C}_c$.

PROPOSITION 3.8.1
Les isocubiques circulaires non pivotales, non isogonales, constituent un faisceau dont les neuf points de bases sont : les sommets du triangle fondamental, les points cycliques et leurs isoconjugués, le point à l'infini de la droite isoconjuguée du cercle circonscrit au triangle fondamental, l'isoconjugué de ce dernier point, intersection du cercle circonscrit et de la conique circonscrite isoconjuguée de la droite à l'infini.

Les droites $(\Omega\Omega^*)$ et $(\Omega'\Omega'^*)$ sont sécantes au point P, pivot de l'unique isocubique circulaire pivotale.

Si ce point appartient à la cubique, son isoconjugué aussi, ce dernier point est le tangentiel commun aux quatre points Ω, Ω^*, Ω' et Ω'^*, c'est le foyer singulier F_s de la cubique qui est focale.

Si ce point P n'appartient pas à la cubique, Ω et Ω' n'ont pas même tangentiel, la cubique n'est pas focale.

PROPOSITION 3.8.2
Dans le faisceau des isocubiques circulaires non pivotales, non isogonales, il existe une unique cubique circulaire focale.

3.9 Cubiques circulaires isogonales

Dans ce paragraphe, nous noterons Ω et Ω' les points cycliques et nous restreignons la conjugaison à l'isogonalité.

Soit $\mathcal{K}$ une cubique isogonale non pivotale, circulaire, et P un de ses points. La cubique est définie par une involution de droites fixes d_1 et d_2 sur le faisceau $\mathcal{D}_P$.

Les points isogonaux Ω et Ω' appartiennent à $\mathcal{K}$ **SSI** les droites $(P\Omega)$ et $(P\Omega')$ sont harmoniquement conjugées par rapport à d_1 et d_2, **SSI** d_1 et d_2 sont orthogonales. On a donc une alternative.

PROPOSITION 3.9.1
Soit $\mathcal{K}$ une cubique isogonale non pivotale, deux cas mutuellement exclusifs sont possibles.
- *elle est circulaire et, pour tout point P de $\mathcal{K}$, l'involution sur $\mathcal{D}_P$ qui définit la cubique a ses droites fixes d_1 et d_2 perpendiculaires ;*
- *elle n'est pas circulaire et, pour tout point P de $\mathcal{K}$, l'involution sur $\mathcal{D}_P$ qui définit la cubique a ses droites fixes d_1 et d_2 non perpendiculaires*

Les points conjugués Ω et Ω' ont même tangentiel, le foyer singulier F_s de $\mathcal{K}$, qui appartient donc à la cubique et dont le conjugué F_s^* est le troisième point de $\mathcal{K}$ sur la droite $(\Omega\Omega')$, c'est à dire à l'infini. Par suite F_s est sur le cercle circonscrit à ABC .

Proposition 3.9.2
Une cubique isogonale circulaire non pivotale $\mathcal{K}$ est focale avec foyer singulier F_s sur le cercle circonscrit au triangle fondamental.

On connaît donc les trois points à l'infini de $\mathcal{K}$, F_s^*, Ω et Ω', ainsi que ses intersections avec le cercle circonscrit, A, B, C, F_s, Ω et Ω'.

Cette cubique est définie par une involution f sur le faisceau $\mathcal{D}_{F_s^*}$ comme lieu des points M tels que $(F_s^*M^*) = f(F_s^*M)$. Les droites doubles sont déterminés comme passant par les deux couples de points, autres que (F_s, F_s^*), alignés avec F_s ; l'un de ces couples étant (Ω, Ω'), l'une des droites doubles est d_∞ et f est la symétrie orthogonale par rapport à la seconde droite double δ.

Réciproquement, tout point F_s^* à l'infini définit, par la symétrie orthogonale par rapport à une droite δ dont il est le point à l'infini, une cubique isogonale et circulaire, car la seconde droite fixe de la symétrie orthogonale est d_∞.

Proposition 3.9.3
Les cubiques non pivotales isogonales circulaires constituent un réseau de cubiques.

Etant donné un point R, il existe une unique cubique isogonale de racine R passant par Ω (donc par Ω') qui est circulaire, autrement dit le faisceau des cubiques isogonales de racines R et le réseau des cubiques isogonales circulaires ont une unique cubique en commun.

On considère désormais une cubique isogonale non pivotale $\mathcal{K}$, de racine R, de droite radicielle d sécante aux côtés de ABC en A^*, B^* et C^*, de foyer singulier F_s sur $\mathcal{C}_c$, F_s^* étant le point à l'infini non cyclique, déterminant une asymptote Δ perpendiculaire à la droite de Simson de F_s.

La cubique est définie par la symétrie orthogonale par rapport à une droite δ parallèle à l'asymptote Δ : pour tout point M de $\mathcal{K}$, les parallèles à δ passant M et M^* sont symétriques par rapport à δ et le milieu M' de $[MM^*]$ est sur δ. En particulier les milieux A', B' et C' de $[AA^*]$, $[BB^*]$ et $[CC^*]$[1] sont sur δ ; A^*, B^* et C^* sont alignés sur d, polaire trilinéaire de R, donc δ est parallèle à la polaire trilinéaire de l'isotomique R_i de R.

L'asymptote non cyclique de $\mathcal{K}$ est la tangente en F_s^* qui recoupe la cubique au tangentiel T de F_s^* tel que T^* soit le troisième point de $\mathcal{K}$ sur $(F_sF_s^*)$. Les droites $(F_s^*T^*) = (F_s^*F_s)$ et (F_s^*T) sont donc symétriques par rapport à δ.

Proposition 3.9.4
L'asymptote non cyclique de $\mathcal{K}$ est la symétrique orthogonale de $(F_sF_s^*)$ par rapport à δ, ou encore l'homothétique de δ par rapport à F_s dans le rapport 2.

Constructions géométriques

Si l'on se donne la droite δ (c-à-d. son point à l'infini F_s^*), on construit F_s sur $\mathcal{C}_c$ dont la droite de Simson est perpendiculaire à δ, puis A^*, B^* et C^* donc d comme intersections avec les côtés de ABC des symétriques par rapport à δ des parallèles à δ menées de A, B et C, à moins que l'on ne préfère construire A', B' et C', intersections de δ avec les côtés du triangle médial de ABC, puis A^* comme symétrique de A par rapport à A', B^* et C^* de façon similaire. On constuit enfin R comme pôle trilinéaire de d et Δ, homothétique de δ par rapport à F_s dans le rapport 2.

So l'on se donne le pôle R, on constuit immédiatement sa polaire trilinéaire d et les points, A^*, B^* et C^*, puis les points A', B' et C' donc la droite d, et l'on termine la construction à partir de d.

On peut ensuite construire le tangentiel T de sur Δ comme intersection de cette droite et de la conique isogonale de $(F_sF_s^*)$ qui est circonscrite à $ABCF_sF_s^*$, puis son isogonal T^*.

[1] A^*, B^* et C^* sont sur les côtés de ABC donc A', B' et C' sont sur les côtés du triangle médial

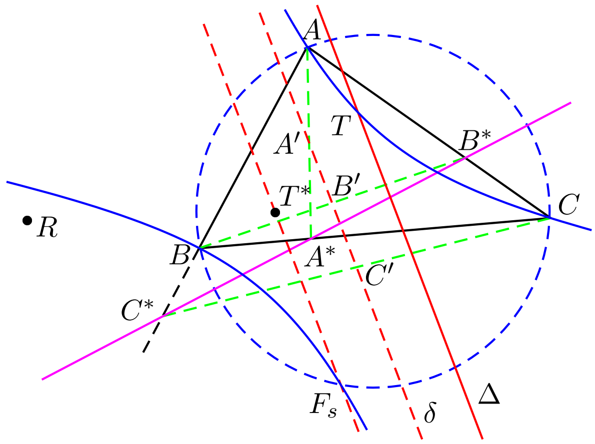

FIG. 3.1 – Eléments fondamentaux d'une cubique isogonale non pivotale circulaire

Si d est la polaire trilinéaire de R, $\mathcal{K}$ est le lieu des foyers des coniques du faisceau tangentiel défini par la droite d et les cotés de ABC qui déterminent un quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ dont le point de Miquel est le foyer singulier F_s de $\mathcal{K}$.

3.10 Cubiques circulaires nodales

Dans ce paragraphe, la conjugaison est l'isogonalité, et l'on note toujours Ω et Ω' les points cycliques.

On fixe deux droites d_1 et d_2 orthogonales et passant par l'un des points fixes de σ, disons I, et l'on considère l'isocubique $\mathcal{K}$, lieu des points M tels que les droites (IM) et (IM^*) soient harmoniquement conjuguées par rapport à d_1 et d_2 ; $\mathcal{K}$ est sans pivot, I est un point double en lequel les droites d_1 et d_2 sont tangentes. La conique pivotale $\mathcal{P}$ est définie par les cinq tangentes (JK), (KL), (LJ), d_1 et d_2, donc I est sur la courbe orthoptique de $\mathcal{P}$.

Les droites d_1 et d_2 orthogonales sont harmoniquement conjuguées par rapport à $(I\Omega)$ et $(I\Omega')$, donc Ω et Ω' sont sur $\mathcal{K}$ qui est par suite circulaire. d_∞ est alors définie par le couple (Ω, Ω') de points isogonaux de $\mathcal{K}$ et est par suite tangente à la conique pivotale qui est donc une parabole. La courbe orthoptique en est sa directrice qui passe par I.

Le contact entre la parabole pivotale et sa tangente $(\Omega\Omega')$ a lieu en F', conjugué harmonique de F_s^* par rapport à Ω et Ω', qui est donc le point à l'infini de l'axe de $\mathcal{P}$, alors que F_s^* est le point à l'infini des perpendiculaires à cet axe c'est-à-dire des paralèlles à la directrice. En particulier l'asymptote non cyclique de $\mathcal{K}$ est parallèle à la directrice de $\mathcal{P}$ qui est donc la droite (IF_s^*).

La parabole $\mathcal{P}$ est en fait inscrite dans le triangle JKL des points fixes de σ non situés sur $\mathcal{K}$; son foyer F est sur le cercle circonscrit à ce triangle, et sa directrice est la droite de Steiner de F et passe donc l'orthocentre I de ce triangle. La connaissance de la directrice (IF_s^*) de $\mathcal{P}$ fournit son foyer F.

Soit P un point de $\mathcal{K}$ qui définit la cubique par l'involution sur $\mathcal{D}_P$ de droites doubles d_1 et d_2. Ces droites sont définies par les couples de points conjugués de $\mathcal{K}$, autres que (P, P^*), alignés avec P. L'une d'elle, d_1 par exemple, est donc la droite (PI), l'autre, d_2 est définie par un couple (M, M^*) dont les points admettent P^* pour tangentiel.

La cubique est circulaire donc d_1 et d_2 sont orthogonales : P est la projection de I sur (MM^*) qui est tangente à la déférente pivotale $\mathcal{P}$.

La parabole $\mathcal{P}$ est l'antipodaire de la cubique par rapport à son point double. Pour tout point M de la cubique, la projection orthogonale du point double sur la droite (MM^*) est l'isogonal T^* du tangentiel commun de M et M^*.

3.11 Cubiques à centres

On étudie ici une isocubique $\mathcal{K}$ sans pivot admettant un centre de symétrie O.

Si d une asymptote de $\mathcal{K}$, la symétrique d' de d par rapport à O est une autre asymptote de $\mathcal{K}$ parallèle à d. Si d et d' sont distinctes, le point à l'infini de d et d' est un point double de $\mathcal{K}$. La cubique admet au plus un point double, mais trois asymptotes. On a donc deux cas possibles :

- la cubique admet trois points simples à l'infini et trois asymptotes concourantes en O ;
- la cubique admet un point double à l'infini, deux asymptotes parallèles passant par ce point, une troisième asymptote passant par O.

Remarquons que ce dernier cas nécessite que σ ait un point fixe à l'infini ; il s'agit d'un cas particulier pour σ que nous traiterons plus tard. Nous supposons donc pour l'instant que $\mathcal{K}$ admet trois points simples à l'infini.

La polaire de O par rapport à $\mathcal{K}$ passe donc par les trois points à l'infini de $\mathcal{K}$, elle contient 3 points alignés donc dégénère. Le centre de symétrie O est un point d'inflexion de $\mathcal{K}$, sa polaire dégénère en la réunion de la tangente en O à $\mathcal{K}$ et de d_∞.

Le centre de symétrie de $\mathcal{K}$ est un point d'inflexion.

Comme O est un point d'inflexion, la tangente en O^* est la droite (OO^*) et O^* est sur la droite de l'infini

Le point O est sur la conique $\mathcal{C}_\sigma$.

Soit P un point à l'infini distinct de O^* ; O est le tangentiel de P donc aussi de P^* qui est par suite à l'infini. Comme nous avons exclu le cas où P serait un point fixe de σ, P^* est donc le troisième point à l'infini de $\mathcal{K}$. Les points P et P^* ont donc leurs isoconjugués à l'infini : ce sont des points de $\mathcal{C}_\sigma$.

Les points à l'infini de $\mathcal{K}$ sont O^* et les points Ω_σ et Ω'_σ à l'infini sur $\mathcal{C}_\sigma$.

La cubique est définie par une involution f sur le faisceau $\mathcal{D}_{O^*}$; Ω_σ et Ω'_σ sont deux points de $\mathcal{K}$ conjugués et alignés avec O^*, ils définissent une première droite fixe de f qui transforme la droite (O^*O) en la tangente en O^* à la cubique, c'est-à-dire elle-même, et on a donc la deuxième droite fixe de f qui est donc la symétrie par rapport à O.

L'isocubique $\mathcal{K}$ est définie par le point O^* conjugué de son centre de symétrie O et par la symétrie par rapport à O sur le faisceau $\mathcal{D}_{O^*}$.

Réciproquement, soit O un point de $\mathcal{C}_\sigma$ hors de d_∞, O^* son conjugué sur d_∞ et $\mathcal{K}$ l'isocubique définie par la symétrie par rapport à (OO^*) sur le faisceau $\mathcal{D}_{O^*}$.

Soit M sur $\mathcal{K}$ et N le point où la droite $(O^*M$ recoupe $\mathcal{K}$. La définition de $\mathcal{K}$ par involution montre que (M^*N^*) est symétrique de (MN) par rapport à O ; les points sont également en configuration fondamentale : O^* est éligné avec M et N d'une part, avec M^* et N^* d'autre part, O est aligné avec M et N^* d'une part, avec N et M^* d'autre part. Le symétrique de M par rapport à O est N^* sur $\mathcal{K}$ qui admet donc O pour centre de symétrie. Le quadrilatère MNN^*M^* est un parallèlogramme de centre O dont les côtés (MN) et (M^*N^*) sont parallèles à l'asymptote (OO^*).

Tout point O à distance finie de $\mathcal{C}_\sigma$ est centre de symétrie d'une isocubique non pivotale.

CHAPITRE 4

Points d'inflexion des isocubiques

4.1 Pivot d'une isocubique pivotale

Soit $\mathcal{K}$ une isocubique de pivot P.

Si P est l'un des points fixes de σ, I par exemple, la cubique dégénère en la réunion des droites (IJ), (IK) et (IL) (cf. 2.1 p. 11) et n'admet pas de points d'inflexion.

Si P n'est pas l'un des points fixes de σ, la conique polaire de P par rapport à $\mathcal{K}$ est circonscrite à $IJKL$.

Si cette conique est dégénèrée, P est aligné avec deux des points fixes de σ : $\mathcal{K}$ dégénère alors en la réunion de trois droites, ou d'une droite et d'une conique (cf. 2.1 p. 11) et n'admet pas de points d'inflexion.

Si cette conique n'est pas dégénèrée, P n'est pas un point d'inflexion de la cubique.

Une isocubique pivotale ne présente jamais une inflexion en son pivot.

4.2 Inflexion des isocubiques pivotales

CHAPITRE 5

Branches infinies des isocubiques

5.1 Isocubiques pivotales admettant une branche parabolique

On se donne un points P_1 à l'infini et l'on cherche les isocubiques pivotales $\mathcal{K}$ tangentes en P_1 à d_∞.

La cubique passe également par P_1^*, point de $\mathcal{C}_\sigma$, et le pivot P est aligné avec P_1 et P_1^*.

Si P_1 et P_1^* sont distincts, P est un point de la droite $(P_1P_1^*)$. Soit Q_1 le conjugué harmonique de P par rapport à P_1 et P_1^* : P_1 est à l'infini donc Q_1 est le symétrique de P par rapport à P_1^*. D'autre part la tangente en P_1 à $\mathcal{K}$ passe par Q_1^* ; ce dernier point est à l'infini et Q_1 est sur $\mathcal{C}_\sigma$.

Il y a donc unicité de l'isocubique pivotale tangente en P_1 à d_∞ : la droite $(P_1P_1^*)$ recoupe $\mathcal{C}_\sigma$ en Q_1 et le pivot P est le symétrique de Q_1 par rapport à P_1^*.

Si P_1 et P_1^* sont confondus, σ admet un point fixe, I par exemple, à l'infini, et $P_1 = I$. Toute isocubique de pivot P passe par I et est tangente en I à la droite (PI) : elle est tangente à d_∞ en I **SSI** P est à l'infini. Remarquons que P doit être distinct de I sinon la cubique dégénère en la réunion des droites (IJ), (IJ) et (IL) et n'est pas tangente en I à d_∞. Il y a donc un faisceau d'isocubiques pivotales tangentes en P_1 à d_∞.

Dans ce dernier cas la cubique recoupe d_∞ en P distinct de I donc la branche parabolique ne peut avoir lieu en un point d'inflexion, alors que dans le premier cas, d_∞ recoupe la cubique en un point P_2 et la branche parabolique sera inflexionnelle dès lors que $P_2 = P_1$.

5.2 Isocubiques non pivotales admettant une branche parabolique

On se donne un points P_1 à l'infini et l'on cherche les isocubiques non pivotales $\mathcal{K}$ tangentes en P_1 à d_∞.

La cubique passe également par P_1^*, point de $\mathcal{C}_\sigma$ et l'on est amené, comme dans le paragraphe précédent, à discuter de la position de P_1 et P_1^*.

Si ces points sont distincts, la droite $(P_1P_1^*)$ recoupe $\mathcal{K}$ en P_2 et la tangente à $\mathcal{K}$ en P_1 passe par P_2^*. Cette tangente sera d_∞ **SSI** P_2^* est lui-même à l'infini, soit P_2 sur $\mathcal{C}_\sigma$.

Il y a un faisceau d'isocubiques non pivotales tangentes en P_1 à d_∞ : elles sont définies par les involutions sur $\mathcal{D}_{P_1}$ qui échangent les droites d_∞ et $(P_1P_1^*)$.

Si P_1 et P_1^* sont confondus, σ admet un point fixe, I par exemple, à l'infini, et $P_1 = I$. Toute isocubique non pivotale passant par I admet un nœud en ce point, et les tangentes sont les droites doubles de l'involution sur $\mathcal{D}_I$ qui définit la cubique.

Il y a un faisceau d'isocubiques non pivotales tangentes en P_1 à d_∞ : elles sont définies par les involutions sur $\mathcal{D}_I$ qui admettent d_∞ pour droite double, la deusième droite double est alors l'asymptote en P_1.

Dans ce dernier cas, la branche parabolique a lieu en un point double et ne peut être inflexionnelle, alors que dans, le premier cas, $\mathcal{K}$ admettra une inflexion en P_1 lorsque l'on aura une intersection triple de $\mathcal{K}$ et d_∞ en P_1, soit $P_1 = P_2^*$ ou $P_1^* = P_2$: la branche parabolique est inflexionnelle dans le cas où la droite $(P_1P_1^*)$ est tangente à $\mathcal{C}_\sigma$ en P_1^*. La tangente en P_1^* à $\mathcal{K}$ est alors la droite $(P_1P_1^*)$.

5.3 Asymptotes des isocubiques pivotales

On se donne trois points à l'infini P_1, P_2, P_3 et l'on cherche les isocubiques pivotales $\mathcal{K}$ passant par ces points.

La cubique passe aussi par les points P_1^*, P_2^* et P_3^*, points de $\mathcal{C}_\sigma$, et le pivot P doit être aligné avec P_1 et P_1^*, avec P_2 et P_2^*, avec P_3 et P_3^*. Or σ admet au plus un point fixe à l'infini : deux des droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ sont parfaitement définies, on supposera que ce sont $(P_1P_1^*)$ et $(P_2P_2^*)$. Il faut alors discuter si ces droites sont distinctes ou non.

Si elles sont confondues, alors $(P_1P_1^*)$ passe par P_2 et ces deux droites sont en fait d_∞ et les points P_1 et P_2 sont les intersections Ω_σ et Ω'_σ de $\mathcal{C}_\sigma$ et de d_∞. Le pivot P est lui aussi sur d_∞, ainsi que sur $\mathcal{K}$ donc $P = P_3$. Si Q est le conjugué harmonique de P par rapport à Ω_σ et Ω'_σ, les asymptotes à $\mathcal{K}$ tangentes en Ω_σ et Ω'_σ sont concourantes sur $\mathcal{C}_\sigma$ en Q^*, l'asymptote tangente en P est la droite (PP^*). Remarquons que ce cas nécessite les points Ω_σ et Ω'_σ distincts, donc que σ n'admette pas de point fixe à l'infini.

Les asymptotes peuvent être concourantes : il faut et il suffit que P, P^* et Q^* soient alignés. Elles ne peuvent concourir sur la cubique, il faudrait alors que Q^* donc Q appartienne à $\mathcal{K}$, qui aurait alors quatre intersections avec d_∞ : P, Q, Ω_σ et Ω'_σ.

Si les droites $(P_1P_1^*)$ et $(P_2P_2^*)$ sont distinctes, le seul pivot possible est leur point d'intersection P. Il y a existence de $\mathcal{K}$ **SSI** P, P_3 et P_3^* sont alignés.

Si σ admet un point fixe, I par exemple, à l'infini, la cubique existe **SSI** $P_3 = I$; sinon on a nécessairement $P_3 \neq P_3^*$: la cubique existe **SSI** les droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ sont concourantes, soit (proposition 1.4.7 page 8) P_3 est conjugué harmonique par rapport à $\mathcal{C}_\sigma$ du point Q en lequel les droites d_∞ et $(P_1^*P_2^*)$ sont sécantes.

On considère alors l'isocubique de pivot P, de points à l'infini P_1, P_2, P_3.

Notons Q_i le conjugué harmonique de P par rapport à P_i et P_i^*, c'est-à-dire le symétrique de P par rapport à P_i^*. Les points obtenus sont sur la conique polaire Γ_P : les points P_i^* sont sur la conique γ homothétique de Γ_P dans le rapport $\dfrac{1}{2}$ par rapport à P ; les tangentes à la cubique en P_i et P_i^* sont sécantes en Q_i^*, ce qui fournit la position des asymptotes.

Soit O le centre de Γ_P ; d'une part O est sur γ, d'autre part la polaire de O par rapport à Γ_P est la droite de l'infini qui passe par O^* et O est sur $\mathcal{C}_\sigma$.

Les points P_i^*, P_2^*, P_3^* et O sont les intersections de γ et de $\mathcal{C}_\sigma$.

5.4 Asymptotes des isocubiques non pivotales

On se donne trois points à l'infini P_1, P_2, P_3 et l'on cherche les isocubiques non pivotales $\mathcal{K}$ passant par ces points.

La cubique passe aussi par les points P_1^*, P_2^* et P_3^*, points de $\mathcal{C}_\sigma$ avec les alignements de configuration fondamentale : (P_1, P_2^*, P_3^*), (P_1^*, P_2, P_3^*) et (P_1^*, P_2^*, P_3). Ce qui ne fournit de renseignements utilisables que lorsqu'il s'agit de triplets de points distincts.

Les triplets dénénèrent lorsque deux des points P_1, P_2, P_3 se correspondent par σ : on supposera alors

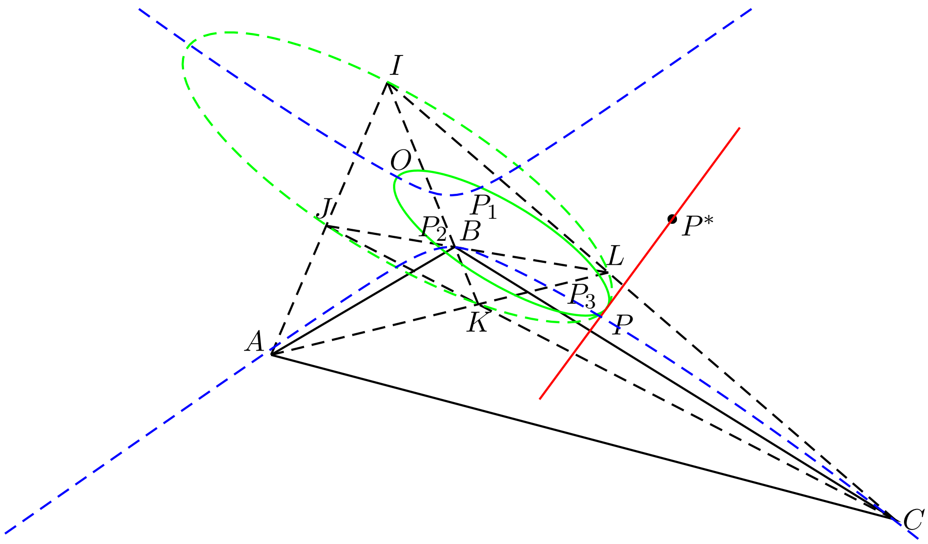

FIG. 5.1 – Intersection de γ et $\mathcal{C}_\sigma$

que P_1 et P_2 sont Ω_σ et Ω'_σ, ce qui nécessite que σ n'ait pas de point fixe à l'infini, donc $P_3 \neq P_3^*$. Il y a un faisceau d'isocubiques non pivotales passant par Ω_σ, Ω'_σ et P_3 : elles sont définies par les involutions sur $\mathcal{D}_{P_3}$ qui admettent d_∞ pour droite double. Les asymptotes tangentes en Ω_σ et Ω'_σ sont alors concourantes en P_3^* sur $\mathcal{K}$. L'asymptote tangente en P_3 sera concourante avec les deux autres **SSI** elle passe par P_3^* **SSI** P_3^* est un point d'inflexion de $\mathcal{K}$.

Sinon P_1, P_2, P_3, P_1^*, P_2^* et P_3^* sont six points distincts : l'alignement de P_1^*, P_2^* et P_3 suffit à assurer les autres alignements par configuration fondamentale. Il y a alors un faisceau d'isocubiques non pivotales passant par ces points, elles sont définies par les involutions sur $\mathcal{D}_{P_3}$ qui échangent d_∞ et $(P_1^*P_2^*)$.

Dans ce dernier cas, les alignements de configuration fondamentale assurent que les droites $(P_2^*P_3^*)$, $(P_1^*P_3^*)$ et $(P_1^*P_2^*)$ sont parallèles aux asymptotes tangentes en P_1, P_2 et P_3 respectivement, avec P_1^*, P_2^* et P_3^* sur $\mathcal{C}_\sigma$.

5.5 Résumé des comportements asymptotiques

Isocubiques tangentes en un point P_1 à d_∞ :

- Si P_1 est un point fixe de σ, pas d'inflexion en P_1, et :
  - un faisceau d'isocubiques pivotales ;
  - un faisceau d'isocubiques non pivotales ;
- Si P_1 n'est pas un point fixe de σ, inflexion possible en P_1, et :
  - unicité de l'isocubique pivotale ;
  - un faisceau d'isocubiques non pivotales.

Isocubiques admettant trois points distincts P_1, P_2 et P_3 à l'infini :

- Ω_σ et Ω'_σ sont points à l'infini de la cubique :
  - une unique isocubique pivotale de pivot P_3 ;
  - un faisceau d'isocubiques non pivotales ;
- Ω_σ et Ω'_σ ne sont pas points à l'infini de la cubique :
  - une unique isocubique pivotale si σ admet un point fixe à l'infini ou si $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ sont concourantes, aucune isocubique pivotale sinon ;
  - un faisceau d'isocubiques non pivotales lorque P_3 est aligné avec P_1^*, P_2^*, aucune isocubique non pivotale sinon.

CHAPITRE 6

Cubiques $\mathcal{K}_{60}$

Nous étudions ici une isocubique $\mathcal{K}$ dont les trois asymptotes forment deux à deux des angles de 60 degrés. Une telle cubique est dite du type .$\mathcal{K}_{60}$

Nous noterons d_1, d_2 et d_3 ses aymptotes, P_i le point à l'infini de d_i.

6.1 Coniques polaires

Nous n'utiliserons pas ici l'invariance de $\mathcal{K}$ par la transformation du second ordre : les résultats établis sont valables pour toutes les cubiques.

Nous ne supposons pas ici la cubique $\mathcal{K}$ du type $\mathcal{K}_{60}$.

La conique polaire γ_1 de P_1 est sécante à la droite de l'infini en P_1 et en Q_1, conjugué harmonique de P_1 par rapport à P_2 et P_3.

Soit M un point quelconque du plan, non situé sur la droite à l'infini. La droite (MQ_1) est la conjuguée harmonique de (MP_1) par rapport à (MP_2) et (MP_3), ces trois dernières droites étant parallèles aux asymptotes de $\mathcal{K}$, alors que (MQ_1) et (MP_1) sont parallèles aux asymptotes de γ_1.

Si $\mathcal{K}$ est du type $\mathcal{K}_{60}$, (MP_1) est une bissectrice des droites (MP_2) et (MP_3) donc (MQ_1) est l'autre bissectrice et est perpendiculaire à (MP_1) : la conique γ_1 est une hyperbole équilatère. De même pour les coniques polaires γ_2 et γ_3.

Réciproquement, si γ_1 est une hyperbole équilatère, les droites (MP_1) et (MQ_1) sont orthogonales, ce sont les bissectrices des droites (MP_2) et (MP_3).

Si de plus γ_2 et γ_3 sont aussi des hyperboles équilatères, chacune des droites (MP_1), (MP_2) et (MP_3) est bissectrice des deux autres : elles forment deux à deux des angles de 60 degrés et la $\mathcal{K}$ est du type $\mathcal{K}_{60}$.

THÉORÈME 6.1.1
Une cubique est du type $\mathcal{K}_{60}$ si, et seulement si, ses points à l'infini ont pour conique polaire une hyperbole équilatère.

D'autre part les coniques polaires des points d'une droite, en particulier de d_∞, forment un faisceau, et un faisceau de conique qui contient deux hyperboles équilatères est constitué uniquement de telles coniques. On en déduit une autre forme du théorème précédent

PROPOSITION 6.1.1
Une cubique est du type $\mathcal{K}_{60}$ si, et seulement si, les points de d_∞ ont pour conique polaire une hyperbole équilatère.

Remarque 1
Dans la pratique il suffit donc de vérifier la nature de la conique polaire de deux points à l'infini.

On suppose désormais la cubique $\mathcal{K}$ du type $\mathcal{K}_{60}$ et l'on s'intéresse à la concourance de ses asymptotes. Si tel est le cas on dira que la cubique est du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$.

Si les asymptotes d_1, d_2 et d_3 de $\mathcal{K}$ concourent en P_0, la conique polaire γ_0 de P_0 passe par P_1, P_2 et P_3 et dégénère en la réunion de deux droites dont d_∞.

Soit M un point à distance finie, distinct de P_0 et M' le point à l'infini de la droite (MP_0). La conique polaire γ de M par rapport à $\mathcal{K}$ appartient au faisceau défini par γ_0 et la polaire γ' de M'. Comme γ_0 contient la droite de l'infini, γ et γ' ont leurs asymptotes parallèles et γ est comme γ' une hyperbole équilatère.

Réciproquement, supposons que tout point admette une hyperbole équilatére pour conique polaire, en particulier le point M intersection de d_1 et d_2. Si P_1 et P_2 étaient les seuls points à l'infini de la polaire γ de M, ses asymptotes seraient (OP_1) et (OP_2) (où O est le centre de γ) parallèles à d_1 et d_2 donc non orthogonales. Par suite γ admet plus de deux points à l'infini ; elle est dégénérée et contient la droite de l'inifini, en particulier P_3. La droite (MP_3) est tangente en P_3 à $\mathcal{K}$ et M est sur l'asymptote d_3.

Théorème 6.1.2
Une cubique est du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$ si, et seulement si, le réseau des coniques polaires est constitué d'hyperboles équilatères uniquement.

Remarque 2
Dans la pratique il suffit de vérifier la nature de la conique polaire en trois points non alignés du plan, par exemple les sommets du triangle fondamental.

6.2 Les cubiques $\mathcal{K}_{60}^{++}$

On appelle cubique du type $\mathcal{K}_{60}^{++}$ une cubique du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$ passant par le point P_0 de concours de ses asymptotes, qui est le tangentiel commun des points P_1, P_2 et P_3 à l'infini sur la cubique $\mathcal{K}$.

La conique polaire γ_0 de P_0 contient d_∞ : elle est dégénérée. P_0 est donc un point d'inflexion de $\mathcal{K}$ et sa polaire contient la tangente à $\mathcal{K}$ en P_0, c'est la réunion de cette tangente et de d_∞.

Si la cubique est non pivotale, on la dira du type $n\mathcal{K}_{60}^{++}$, alors P_0 est également le tangentiel de P_1^*, P_2^* et P_3^* : P_0^* est sur chacune des droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ qui sont donc concourantes.

Ces résutats sont a priori en désaccord avec les propiétés générales des isocubiques non-pivotales :
- D'un point P de la cubique, on ne mène en général (classe 6) que 4 tangentes à la cubiques autres que celles en P (2 si elle est de classe 4), et ce nombre diminue encore d'une unité lorsque P est un point d'inflexion, ce qui est le cas de P_0 ;
- Pour un point M de la cubique, il n'existe que 2 couples $(M_1M_1^*)$, $(M_2M_2^*)$de points alignés avec M autres que (M, M^*) (si M n'est pas un des points fixes de σ.

Ces contradictions apparentes ne peuvent se résoudre qui si deux des couples (P_1, P_1^*), (P_2, P_2^*) ou (P_3, P_3^*) sont égaux, on supposera que $(P_2, P_2^*) = (P_3, P_3^*)$.

L'égalité $P_2 = P_3$ est impossible, ces points définissent des directions de droite à 60 degrés : on a donc $P_2 = P_3^*$ et $P_3 = P_2^*$. Les points P_2 et P_3 sont sur d_∞ donc P_2^* et P_3^* sont sur $\mathcal{C}_\sigma$.

Si $\mathcal{K}$ est une isocubique du type $n\mathcal{K}_{60}^{++}$, deux de ses points à l'infini sont les points à l'infini de $\mathcal{C}_\sigma$, ce qui détermine le troisième.

Une condition nécessaire d'existence de cubiques du type $n\mathcal{K}_{60}^{++}$, est donc que la conique circonscrite $\mathcal{C}_\sigma$ possède des asymptotes à 60 degrés.

Si $\mathcal{K}$ est pivotale, le pivot est le point de concours des droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$.

Etant donnés trois points P_1, P_2 et P_3 à l'infini qui définissent des directions de droites formant deux à deux des angles de 60 degrés, une condition nécessaire pour qu'il existe une cubique du type $\mathcal{K}_{60}^{++}$ admettant ces points pour points à l'infini est que les droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ concourent. Le point de concours est alors sur la cubique.

6.3 Les cubiques $\mathcal{K}_{60}$ pivotales

Remarquons tout d'abord que, pour l'isogonalité, la conique polaire du pivot P d'une isocubique $\mathcal{K}$ est circonscrite à $IJKL$, quadrilatère orthocentrique : c'est une hyperbole équilatère : tout cubique pivotale isogonale du type $\mathcal{K}_{60}$, dont le pivot est à distance finie, est du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$.

L'étude des asymptotes des isocubiques a fait apparaître l'importance du fait que Ω_σ et Ω'_σ soient, ou ne soient pas, des points à l'infini de la cubique.

Supposons tout d'abord que $\mathcal{K}$ soit une isocubique pivotale du type $\mathcal{K}_{60}$ admettant Ω_σ et Ω'_σ pour points à l'infini. Ce cas nécessite que les asymptotes de $\mathcal{C}_\sigma$ forment un angle de 60 degrés[1]. Le troisième point à l'infini est déterminé de manière unique comme définissant une direction de droites faisant des angles de 60 degrés avec chacune des asymptotes de $\mathcal{C}_\sigma$: $\mathcal{K}$ est l'isocubique de pivot P, avec P^* à distance finie sur $\mathcal{C}_\sigma$.

Cette cubique sera du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$ **SSI** la conique polaire de P^* est une hyperbole équilatère. Cette conique est circonscrite à $ABCPP^*$, elle est une hyperbole équilatère **SSI** elle passe par H, soit si son image par σ, la droite (PP^*) passe par H_σ. Lors de l'étude des asymptotes d'une cubique pivotale, nous avons remarqué que, dans ce cas, les asymptotes ne pouvaient concourir sur la cubique : $\mathcal{K}$ n'est pas du type $\mathcal{K}_{60}^{++}$.

Il y a unicité de l'isocubique pivotale du type $\mathcal{K}_{60}$ admettant Ω_σ et Ω'_σ pour points à l'infini. Elle est du type $\mathcal{K}_{60}^{+}$ si, et seulement si, son pivot P est un point à l'infini de l'isocubique de pivot H_σ[2]. Elle n'est jamais du type $\mathcal{K}_{60}^{++}$.

Supposons désormais que $\mathcal{K}$ soit une isocubique pivotale du type $\mathcal{K}_{60}$ n'admettant pas Ω_σ et Ω'_σ pour points à l'infini.

On sait que la cubique pivotale admettant les points P_1, P_2 et P_3 à l'infini est unique et existe **SSI** P_1 est conjugué harmonique par rapport à $\mathcal{C}_\sigma$ du point Q d'intersection de $(P_2^*P_3^*)$ et de d_∞.

En termes de birapports cette condition s'écrit $(P_1, Q, \Omega_\sigma, \Omega'_\sigma) = -1$. Or :

- $(P_1, Q, \Omega_\sigma, \Omega'_\sigma) = (AP_1, AQ, A\Omega_\sigma, A\Omega'_\sigma)$ (birapport de quatre droites concourantes) ;
- $(AP_1, AQ, A\Omega_\sigma, A\Omega'_\sigma) = (AP_1^*, AQ^*, A\Omega'_\sigma, A\Omega_\sigma)$ (conservation du birapport par σ sur $\mathcal{D}_A$).

Donc $(AP_1^*, AQ^*, A\Omega'_\sigma, A\Omega_\sigma) = -1$: les cordes $[AP_1^*]$ et $[AQ^*]$ de $\mathcal{C}_\sigma$ sont conjuguées, les points P_1^* et Q^* sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}_\sigma$.

6.4 Les cubiques $\mathcal{K}_{60}$ non pivotales

Dans ce cas aussi, l'importance du fait que Ω_σ et Ω'_σ soient, ou ne soient pas, des points à l'infini de la cubique est capitale.

Supposons tout d'abord que $\mathcal{K}$ soit une isocubique non pivotale du type $\mathcal{K}_{60}$ admettant Ω_σ et Ω'_σ pour points à l'infini. Le troisième point à l'infini P est déterminé de manière unique comme définissant une direction de droites faisant des angles de 60 degrés avec chacune des asymptotes de $\mathcal{C}_\sigma$.

[1]Nous souhaitons que des travaux complémentaires caractérisent les transformations du second ordre qui satisfont à cette condition

[2]Dans le cas de l'isogonalité, il s'agit de la cubique de MacKay, dans le cas de l'isotomie, de la cubique de Lucas.

On obtient alors un faisceau d'isocubiques non pivotales passant par Ω_σ, Ω'_σ et P : elles sont définies par les involutions f sur $\mathcal{D}_P$ admettant d_∞ pour droite double. Les asymptotes sont alors $(\Omega_\sigma P^*)$ et $(\Omega'_\sigma P^*)$, communes à tout le faisceau, d'une part, et la droite $d = f(PP^*)$, propre à chaque cubique, d'autre part.

Deux des asymptotes étant sécantes en P^* sur $\mathcal{K}$, le type $\mathcal{K}_{60}^{+}$ sera représenté uniquement par des cubiques du type $\mathcal{K}_{60}^{++}$. Pour ce faire, l'asymptote d, tangente en P, devra passer, elle aussi, par P^*, soit $d = (PP^*)$, ce qui n'est le cas que pour la seule cubique définie par l'involution sur $\mathcal{D}_P$ admettant d_∞ et (PP^*) pour droites doubles.

Supposons désormais que $\mathcal{K}$ soit une isocubique non pivotale du type $\mathcal{K}_{60}$ n'admettant pas Ω_σ et Ω'_σ pour points à l'infini.

On sait que les cubiques non pivotales admettant les points P_1, P_2 et P_3 à l'infini existent et constituent un faisceau **SSI** P_1 est aligné avec P_2^* et P_3^*. Les asymptotes sont alors parallèles aux droites $(P_2^*P_3^*)$, $(P_3^*P_1^*)$ et $(P_1^*P_2^*)$: le triangle $P_1^*P_2^*P_3^*$ est donc équilatéral.

Les droites $(P_1P_1^*)$, $(P_2P_2^*)$ et $(P_3P_3^*)$ sont concourantes ou forment un triangle équilatéral $\mathcal{T}$ circonscrit à $P_1^*P_2^*P_3^*$, les deux triangles ayant leurs côtés respectivement parallèles. Dans ce dernier cas, $P_1^*P_2^*P_3^*$ est le triangle médial de $\mathcal{T}$.

CHAPITRE 7

Isocubiques particulières

7.1 Cubique de Darboux

7.1.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Darboux d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot le point de Longchamps* $L = X_{20}$.

7.1.2 Point de vue classique

Il s'agit de déterminer le lieu $\mathcal{K}$ des points P tels que le triangle podaire $P_aP_bP_c$ du point P par rapport à ABC soit en perspective avec ABC, c.-à-d. soit le triangle pédal d'un point M.

Remarque préliminaire : Ce lieu passe par :
- A, B, C (leurs triangles podaires dégénèrent en les segment limités par ABC sur les hauteurs, qui sont en perspective avec ABC) ;
- l'orthocentre H (le triangle orthique est à la fois podaire et pédal de H ;
- le centre du cercle circonscrit O (le triangle médial est podaire de O et pédal du centre de gravité G ;
- les centres I, I_a, I_b et I_c des cercles inscrit et exinscrits (leurs triangles podaires respectifs sont les triangles pédaux du point de Gergonne et des sommets du triangle de Gergonne).

Soit P un point quelconque et P' son symétrique par rapport à O, les projections de P et P' sur un côté de ABC sont deux points isotomiques de ce côté. Le théoème de Céva montre immédiatement que le triangle podaire de P est en persepctive ABC si, et seulement si, celui de P' l'est.

Le point O est centre se symétrie de $\mathcal{K}$.

Le point de Longchamps L, symétrique de H par rapport à O appartient à $\mathcal{K}$.

Soit P un point quelconque et P^* son isogonal par rapport à ABC ; il est bien connu que les triangles podaires de P et P^* sont inscrits dans un cercle dont le centre est le milieu de $[PP^*]$ (cf. [1] p. 138). Le théorème de Carnot (cf. *infra* A, p. 44) assure que le triange podaire de P est en persepctive ABC si, et seulement si, celui de P^* l'est.

Le lieu $\mathcal{K}$ est stable par isogonalité.

Notons a_∞, b_∞ et c_∞ les points à l'infini des médiatrices respectives de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{D}_b$ et $\mathcal{D}_c$ les faisceaux de droites admettant respectivement ces points pour sommet.

Soit d_a une droite de $\mathcal{D}_a$, sécante à (BC), en M_a, une droite d de $\mathcal{D}_b$ est sécante à (AC) en M_b, la droite

(BM_b) est sécante à (AM_a) en M, la droite (CM) est sécante à (AB) en M_c, et nous notons d' la droite $(M_c c_\infty)$ de $\mathcal{D}_c$.

Pour quatre droites de $\mathcal{D}_b$,et avec des notations évidentes, il vient :

$$\begin{aligned}
(d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)}) &= (BM_b^{(1)}, BM_b^{(2)}, BM_b^{(3)}, BM_b^{(4)}) && \text{calcul du birapport sur } (AC)\\
(BM_b^{(1)}, BM_b^{(2)}, BM_b^{(3)}, BM_b^{(4)}) &= (CM_c^{(1)}, CM_c^{(2)}, CM_c^{(3)}, CM_c^{(4)}) && \text{calcul du birapport sur } (AM_a)\\
(CM_c^{(1)}, CM_c^{(2)}, CM_c^{(3)}, CM_c^{(4)}) &= (d'^{(1)}, d'^{(2)}, d'^{(3)}, d'^{(4)}) && \text{calcul du birapport sur } (AB)
\end{aligned}$$

donc $d \mapsto d'$ est une homographie $\mathcal{D}_b$ dans $\mathcal{D}_c$ et le lieu du point $P = d \cap d'$ est une conique Γ_{d_a} passant par b_∞ et c_∞.

Lorsque d est passe par A on a $M_b = M = M_c = A$ et d' passe également par A qui appartient ainsi à Γ_{d_a}. Lorsque d passe par C, on a $M_b = C$, $M = M_a$, $M_c = B$: d et d' sont les perpendiculaire en C à (AC) et en B à (AB) dont l'intersection est le point A' diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}_c$.

On associe ainsi ,à toute droite d_a de $\mathcal{D}_a$, la conique Γ_{d_a} du faisceau d'hyperboles $\mathcal{F}$ à points de base A, A', b_∞ et c_∞. Tout point M de (AM_a) admet $M_aM_bM_c$ pour triangle pédal, alors que M_b et M_c sont deux sommets du triangle du triangle podaire de P de Γ_{d_a}. Ce dernier point appartient donc à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, il appartient à d_a : $\mathcal{K}$ est le lieu des intersections de la droite d_a et de l'hyperbole Γ_{d_a}, c.-à-d. une cubique passant par a_∞, A, A', b_∞ et c_∞.

$\mathcal{K}$ est une cubique isogonale, admettant pour centre de symétrie le point O qui n'appartient pas au cercle circonscrit . Elle est donc pivotale de pivot le symétrique de $H = O^*$ par rapport à O, c.-à-d. L : $\mathcal{K}$ est la cubique de Darboux.

Ses points à l'infini sont a_∞, b_∞ et c_∞, elle n'admet pas de paire d'asymptotes parallèles ; par symétrie les asymptotes sont concourantes au centre O sur la cubique.

La cubique de Darboux est du type $p\mathcal{K}^{++}$; ses asymptotes sont les médiatrices du triangle ABC.

Cette méthode est très fructueuse pour caractériser des lieux géométriques en tant que cubique. Elle sera fort utilisée dans la suite de ce chapitre.

7.2 Caractérisation par orthologie

Considérons l'énoncé suivant [1] :

Soit $A'B'C'$ le triangle podaire d'un point P. Soit $\mathcal{L}_a$ la droite passant par les projections orthogonales de A' sur (AB) et (AC). On définit de même $\mathcal{L}_b$ et $\mathcal{L}_c$ par permutation circulaire.

$\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}_b$ et $\mathcal{L}_c$ définissent un triangle $A''B''C''$ que Floor van Lamoen appelle le triangle « pédiaque » du point P.

Quel est alors le lieu des points P tels que le triangle $A''B''C''$ soit orthologique à ABC ?

Soient encore a_∞, b_∞ et c_∞ les points à l'infini des médiatrices de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{D}_b$ et $\mathcal{D}_c$ les faisceaux de droites de sommmets respectifs a_∞, b_∞, c_∞.

Fixons une droite d_a dans $\mathcal{D}_a$, sécante à (BC) en A', d'où une droite $\mathcal{L}_a$. Soit de même une droite d_b dans $\mathcal{D}_b$, sécante à (AC) en B', d'où une droite $\mathcal{L}_b$.

Les perpendiculaires abaissées de A tsur $\mathcal{L}_a$ et de B sur $\mathcal{L}_b$ un triangle $A''B''C''$ orthologique à ABC si, et seulement si, $\mathcal{L}_c$ est perpendiculaire à (CM).

Une telle droite $\mathcal{L}_c$ est sécante à (BC) en Q_a, à (AC) en Q_b, projections orhtogonales d'un point Q sur (BC) et (CA). Le lieu de ce point Q, lorsque $\mathcal{L}_c$ varie, en restant perpendiculaire à (CM), est une droite passant par C, sécante à (AB) en C'.

[1] Je dois ce problème à Floor van Lamoen

Soit d_c la droite du faisceau $\mathcal{D}_c$ passant par C', on définit ainsi une homographie $d_b \mapsto d_c$ du faisceau $\mathcal{D}_b$ dans le faisceau $\mathcal{D}_c$; le lieu du point $P = d_b \cap d_c$, est une conique Γ_a passant par les sommets de D_b et D_c, c.-à-d. une hyperbole admettant b_∞ et c_∞ pour points à l'infini. Lorsque B' est en C, alors P est en A_1, diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit ; lorsque B' est en A, alors P également : $Gamma_a$ passe par A et A_1.

Nous définissons donc une homographie $d_a \mapsto \Gamma_a$ du faisceau $\mathcal{D}_a$ dans le faisceau de coniques circonsrites à $AA_1b_\infty c_\infty$.

Le point P définit (par l'intermédiaire de son triangle podaire $A'B'C'$) un triangle $A''B''C''$ limité par $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}_b$ et $\mathcal{L}_c$, et orthologique à ABC si, et seulement si P est l'un des points d'intersection de d_a et de Γ_a.

Ainsi le lieu des points P satisfaisant aux conditions du problème posé au début de ce paragraphe est une cubique $\mathcal{K}$ passant par a_∞, b_∞, c_∞, A et A_1. On montre de même, par permutation, que $\mathcal{K}$ passe par B et B_1 d'une part, C et C_1 d'autre part.

La cubique $\mathcal{K}$ est donc définie par 9 points : les sommets du triangle ABC, les sommets du triangle circoncévien $A_1B_1C_1$ du point O, et ses points à l'infini a_∞, b_∞ et c_∞ : $\mathcal{K}$ est la cubique de Darboux.

7.3 Cubique de Lucas

7.3.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Lucas d'un triangle ABC en tant que *cubique isotomique de pivot l'isotomique de l'orthocentre* $H^* = X_{69}$.

7.3.2 Point de vue classique

Il s'agit de déterminer le lieu $\mathcal{K}$ des points P tels que le triangle pédal $P_aP_bP_c$ du point P par rapport à ABC soit le triangle podaire d'un point M.

Remarque préliminaire : Le triangle podaire du point M est le pédal d'un point P si, et seulement si, M appartient à la cubique de Darboux. Les points connus fournissent, sur $\mathcal{K}$, les points :
- A, B, C ;
- l'orthocentre H ;
- le centre de gravité G ;
- le point de Gergonne et les sommets du triangle de Gergonne.

Soit P un point quelconque, son cercle pédal est également le cercle pédal du point cyclocévien P'. Deux points isogonaux ayant le même triangle podaire, si le triangle pédal de P est le triangle podaire de M, le triangle pédal de P' est le triangle podaire de l'isogonal de M.

$\mathcal{K}$ est invariant par conjugaison cyclocévienne.

Soit P un point quelconque et P^* son isotomique par rapport à ABC ; il est évident que le triangle pédal de P est le triangle podaire de M si, et seulement si, le triangle pédal de P^* est le triangle podaire du symétrique M' de M par rapport à O.

Le lieu $\mathcal{K}$ est stable par isotomie.

Les points connus sur $\mathcal{K}$ fournissent de nouveaux points : l'isotomique H^* de H, le point de Nagel et les sommets du triangle de Nagel.

Notons $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ les faisceaux de droites de sommets respectifs A, B et C, et fixons une droite d_a dans $\mathcal{D}_A$, sécante à (BC) en M_a.

Une droite d_b de $\mathcal{D}_B$ est sécante à (AC) en M_b, les perpendiculaires en M_a à (BC) et en M_b à (AC) sont sécantes en M, qui se projette orthogonalement sur (AB) en M_c ; nous notons alors d_c la droite $(CM_c$ de

$\mathcal{D}_C$.

Pour quatre droites de $\mathcal{D}_B$,et avec des notations évidentes, il vient :

$$\begin{aligned}
(d_B^{(1)}, d_b^{(2)}, d_b^{(3)}, d_b^{(4)}) &= (M^{(1)}M_b^{(1)}, M^{(2)}M_b^{(2)}, M^{(3)}M_b^{(3)}, M^{(4)}M_b^{(4)}) \\
&\qquad \text{calcul du birapport sur } (AC) \\
(M^{(1)}M_b^{(1)}, M^{(2)}M_b^{(2)}, M^{(3)}M_b^{(3)}, M^{(4)}M_b^{(4)}) &= (M^{(1)}M_c^{(1)}, M^{(2)}M_c^{(2)}, M^{(3)}M_c^{(3)}, M^{(4)}M_c^{(4)}) \\
&\qquad \text{calcul du birapport sur la perpendiculaire en } M_a \text{ à } (BC) \\
(M^{(1)}M_c^{(1)}, M^{(2)}M_c^{(2)}, M^{(3)}M_c^{(3)}, M^{(4)}M_c^{(4)}) &= (d_c^{(1)}, d_c^{(2)}, d_c^{(3)}, d_c^{(4)}) \\
&\qquad \text{calcul du birapport sur } (AB)
\end{aligned}$$

donc $d_b \mapsto d_c$ est une homographie $\mathcal{D}_B$ dans $\mathcal{D}_C$ et le lieu du point $P = d_b \cap d_c$ est une conique Γ_a passant par B et C.

Notons a_∞, b_∞ et c_∞ les points à l'infini des médiatrices de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ d'une part, A_∞, B_∞ et C_∞ ceux des droites (BC), (CA) et (AB) d'autre part ; lorsque d_b est parllèle à (AC), on a $M_b = B\_infty$, $M = a_\infty$, $M_c = C_\infty$ et d_c est parallèle à (AB) : le point P est alors le sommet G_a du triangle anticomplémentaire qui appartient ainsi à Γ_{d_a}.

On associe ainsi à toute droite d_a de $\mathcal{D}_A$ la conique Γ_a du faisceau $\mathcal{F}$ de coniques circonscrites à BCG_a et tangentes en G_a à la droite .... Tout point M de (AM_a) admet $M_aM_bM_c$ pour triangle podaire, alors que M_b et M_c sont deux sommets du triangle du triangle pédal de P de Γ_a. Ce dernier point appartient donc à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, il appartient à d_a : $\mathcal{K}$ est le lieu des intersections de la droite d_a et de l'hyperbole Γ_a, c.-à-d. une cubique passant par A, B, C, G_a et tangente en G_a à la droite ...

Par permutation on montre de même que $\mathcal{K}$ passe par G_b et G_c avec les tangentes respectives ...

$\mathcal{K}$ est une cubique isotomique qui passe par trois des points fixes de l'isotomie, donc aussi par le quatrième G ; elle est pivotale de pivot le point de concours H^* des tangentes en G_a, G_b et G_c : $\mathcal{K}$ est la cubique de Lucas.

La cubique de Lucas et celle de Darboux sont intimement liées On dispose d'une bijection Φ qui, à tout point P de la première, associe le point M de la seconde dont le triangle podaire est le triangle cévien de P. Cette bijection conjugue respectivement la conservation par isotomie et par conjugaison cyclocévienne sur la cubique de Lucas avec la conservation par symétrie relativement à O et par isogonalité sur la cubique de Darboux. Cette conjugaison permet de transformer immédiatement toute propriété de l'une des cubiques en une propriété de l'autre.

7.4 Cubique de MacKay

7.4.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de MacKay d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot le centre du cercle circonscrit* $O = X_3$.

7.5 Cubique de Neuberg

7.5.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Neuberg d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot à l'infini sur la droite d'Euler* $E_\infty = X_{30}$.

7.5.2 Caractérisation géométrique

Étant donné un point M, nous notons M_a, M_b et M_c ses symétriques orthogonaux par rapport à (BC), (CA) et (AB) respectivement, et $\mathcal{K}$ l'ensemble des points M tels que le triangle $M_aM_bM_c$ soit en perspective avec ABC.

Soient encore a_∞, b_∞ et c_∞ les points à l'infini des médiatrices de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{D}_b$ et $\mathcal{D}_c$ les faisceaux de droites de sommmets respectifs a_∞, b_∞, c_∞.

Fisons une droite d_a dans $\mathcal{D}_a$

7.6 Cubique de Thomson

7.6.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Thomson d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot le centre de gravité* $G = X_2$.

7.7 Orthocubique

7.7.1 Définition

Nous définirons ici l'orthocubique d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot l'orthocentre* $H = X_4$.

Elle est également isogonale par rapport au triangle orthique de pivot $O = X_3$.

7.8 Cubique de Feuerbach-Napoléon

7.8.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Feuerbach-Napoléon d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale de pivot le centre du cercle d'Euler* $N = X_5$.

7.9 Première cubique de Brocard

7.9.1 Définition

Nous définirons ici la première cubique de Brocard d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale sans pivot ....*

7.10 Deuxième cubique de Brocard

7.10.1 Définition

Nous définirons ici la deuxième cubique de Brocard d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale sans pivot ....*

7.11 Troisième cubique de Brocard

7.11.1 Définition

Nous définirons ici la troisième cubique de Brocard d'un triangle ABC en tant que *cubique isogonale* ....

7.12 Cubique de Droussent

7.12.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Droussent d'un triangle ABC en tant que *cubique isotomique de pivot* X_{316}.

7.13 Cubique de Simson

7.13.1 Définition

Nous définirons ici la cubique de Simson d'un triangle ABC en tant que *cubique isotomique sans pivot* ....

Lieu des pôles trilinéaires des droites de Simson.

7.14 Cubique $\mathcal{K}_{jp}$

7.14.1 Définition

La cubique $\mathcal{K}_{jp}$ est l'unique cubique isogonale de type $n\mathcal{K}_{60}^{+}$.

Sa racine est le point de Lemoine K et son paramètre est nul.

Cette cubique admet de nombreuses caractérisations géométriques.

7.14.2 Involution fondamentale

7.14.3 Propriétés relatives au cercle circonscrit

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M d'isogonal M^* tels que le cercle de diamètre $[MM^*]$ soit orthogonal au cercle circonscrit.

7.14.4 Propriétés relatives au cercle d'Euler

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M dont le cercle podaire est orthogonal au cercle d'Euler.

7.14.5 Propriétés liées aux coniques

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M d'isogonal M^* tels que $[MM^*]$ soit un diamètre de la conique circonscrite à $ABCMM^*$.

7.14.6 Propiétés angulaires

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M tels que :

$$\widehat{AM, BC} + \widehat{BM, CA} + \widehat{CM, AB} = 0$$

7.14.7 Première caractérisation par droites de Simson

Soit P un point, D_a, D_b et D_c les droites de Simson respectives des sommets P_a, P_b et P_c de son triangle circoncévien. Nous nous proposons d'étudier le lieu $\mathcal{K}$ des points P tels que D_a, D_b et D_c soient concourantes.

Soit d_a une droite de $\mathcal{D}_A$, P_a sa seconde intersection avec le cercle cirsonscrit, D_a la droite de Simson de P_a.

Une droite d de $\mathcal{D}_B$ recoupe $\mathcal{C}_c$ en P_b de droite de Simson D_b. Par le point $M = D_a \cap D_b$ passe une troisième droite de Simson D_c d'un point P_c, et l'on note $d' = (CP_c)$. On définit ainsi une involution $d \mapsto d'$ de $\mathcal{D}_B$ dans $\mathcal{D}_C$. Le lieu du point $P = d \cap d'$ est une conique Γ_{d_a} passant par B et C.

Le point P appartient à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, son triangle circoncévien est $P_aP_bP_c$ c.-à-d. s'il appartient à d_a. Le lieu du point P est donc lieu de intersections de la droite d_a et de la conique $Gamma_{d_a}$: $\mathcal{K}$ est une cubique passant par A, B, et C.

7.14.8 Seconde caractérisation par droites de Simson

Soit P un point, D_a, D_b et D_c les droites de Simson respectives de A, B et C par rapport au triangle circoncévien$P_aP_bP_c$. Nous nous proposons d'étudier le lieu $\mathcal{K}$ des points P tels que D_a, D_b et D_c soient concourantes.

Soit d_a une droite de $\mathcal{D}_A$, P_a sa seconde intersection avec le cercle cirsonscrit, D_a la droite de Simson de P_a.

Une droite d de $\mathcal{D}_B$ recoupe $\mathcal{C}_c$ en P_b de droite de Simson D_b. Par le point $M = D_a \cap D_b$ passe une troisième droite de Simson D_c d'un point P_c, et l'on note $d' = (CP_c)$. On définit ainsi une involution $d \mapsto d'$ de $\mathcal{D}_B$ dans $\mathcal{D}_C$. Le lieu du point $P = d \cap d'$ est une conique Γ_{d_a} passant par B et C.

Le point P appartient à $\mathcal{K}$ si, et seulement si, son triangle circoncévien est $P_aP_bP_c$ c.-à-d. s'il appartient à d_a. Le lieu du point P est donc lieu de intersections de la droite d_a et de la conique $Gamma_{d_a}$: $\mathcal{K}$ est une cubique passant par A, B, et C.

7.14.9 Première caractérisation par triangle circoncévien

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M de triangle circoncévien $M_aM_bM_c$, d'isogonal M^* tels que les droites (AM^*) et (M_bM_c) soient parallèles.

On obtiendrait donc le même lieu en remplaçant la condition « (AM^*) et (M_bM_c) sont parallèles » par « (BM^*) et (M_cM_a) sont parallèles » ou par « (CM^*) et (M_aM_b) sont parallèles ».

7.14.10 Seconde caractérisation par triangle circoncévien

Nous étudions ici le lieu $\mathcal{K}$ des points M de triangle circoncévien $M_aM_bM_c$,tels que les parallèles menées respectivement de M_a à (BC), de M_b à (CA), et de M_c à (AB), soient concourantes.

7.15 Cubique de Lemoine

7.15.1 Définition

7.15.2 Approche historique

Cette cubique apparaît pour la première fois dans une note de Lemoine[2] dans laquelle il étudie le lieu des points M tels que les points M_a, M_b et M_c, intersections respectives des droites (MA), (MB) et (MC) avec les médiatrices de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, soient alignés.

Fixons une droite d_A du faisceau $\mathcal{D}_A$ de sommet A, sécante à la médiatrice de $[BC]$ en M_a. Une droite d_B du faisceau $\mathcal{D}_B$ de sommet B est sécante à la médiatrice de $[AC]$ en M_b, la droite (M_aM_b) est sécante à la médiatrice de $[AB]$ en M_c, et nous notons d_C la droite (CM_c) du faisceau $\mathcal{D}_C$ de sommet C.

Nous définissons ainsi une homographie $d_B \mapsto d_C$ de $\mathcal{D}_B$ dans $\mathcal{D}_C$, et lieu du point $M = d_B \cap d_c$ est une conique Γ_A passant par B et C.

Lorsque $d_B = (BO)$, alors $M_b = M_c = M = O$ qui est sur Γ_A

On définit ainsi une homographie $d_A \mapsto \Gamma_A$ de $\mathcal{D}_A$ dans le faisceau de coniques circonscrites à BCO et tangentes en O à la droite ... Le point M satisfait aux conditions posées par Lemoine si, et seulement si, il est un des points d'intersection de d_A et de Γ_A. Le lieu cherché par Lemoine est une cubique, passant par A, B, C, O, et tangente en O à la droite ...

[2] A.F.A.S.

ANNEXE A

Théorème de Carnot

A.1 Énoncé

Étant donnés 2 triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ inscrits dans un triangle ABC, ils sont inscrits dans une même conique si, et seulement si

$$\frac{CA_1 \cdot CA_2}{BA_1 \cdot BA_2} \cdot \frac{AB_1 \cdot AB_2}{CB_1 \cdot CB_2} \cdot \frac{BC_1 \cdot BC_2}{AC_1 \cdot AC_2} = 1$$

Remarque : Dans ces conditions le théorème de Pascal assure l'alignement des points $A_3 = (B_1C_2) \cap (C_1B_2)$, $B_3 = (C_1A_2) \cap (A_1C_2)$ et $C_3 = (A_1B_2) \cap (B_1A_2)$.

A.2 Preuve

Supposons que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont inscrits dans une conique Γ ; soient c et c' les points d'intersection respectifs de (A_1B_2) et (A_2B_1) avec (AB) ; le théorème de Ménélaüs fournit :

$$\frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{Bc}{Ac} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{CA_2}{BA_2} \cdot \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{Bc'}{Ac'} = 1$$

d'où par produit :

$$\frac{CA_1 \cdot CA_2}{BA_1 \cdot BA_2} \cdot \frac{AB_1 \cdot AB_2}{CB_1 \cdot CB_2} \cdot \frac{Bc \cdot Bc'}{Ac \cdot Ac'} = 1 \tag{A.1}$$

Les coniques du faisceau à points de base A_1, A_2 ,B_1 et ,B_2 induisent, par leurs intersections avec la droite (C_1C_2), une involution de cette droite qui admet pour couples de points homologues :
- C_1 et C_2 pour la conique Γ ;
- c et c' pour la conique $(A_2B_1) \cup (A_1B_2)$;
- A et B pour laconique $(A_1A_2) \cup (B_1B_2)$;

donc

$$\frac{Bc \cdot Bc'}{Ac \cdot Ac'} = \frac{BC_1 \cdot BC_2}{AC_1 \cdot AC_2}$$

qui, reporté dans (A.1), fournit :

$$\frac{CA_1 \cdot CA_2}{BA_1 \cdot BA_2} \cdot \frac{AB_1 \cdot AB_2}{CB_1 \cdot CB_2} \cdot \frac{BC_1 \cdot BC_2}{AC_1 \cdot AC_2} = 1$$

Réciproquement, supposons que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ satisfont à cette dernière relation ; soit Γ la conique circonscrite à $A_1B_1C_1A_2B_2$ et C_2' le point où elle recoupe (AB). La méthode par coÏncidence montre immédiatement que $C_2' = C_2$.

A.3 Corollaires

Du théorème de Carnot, associé au théorème de Céva, on déduit immédiatement les corollaires suivants :

1. Si les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont en perspective avec ABC, ils sont inscrits dans une conique.
2. Si les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont inscrits dans une conique et si $A_1B_1C_1$ est en perspective avec ABC, $A_2B_2C_2$ l'est également.

Si P_1 et P_2 sont les centres de perspective respectifs de $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ avec ABC, la conique Γ_{P_1,P_2} circconscite à l'hexagone $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ s'appelle la *conique bipédale* des points P_1 et P_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Yvonne et René SORTAIS. *La géométrie du triangle.* HERMANN, Paris, 1987.