

# ÉTUDE SUR LES DROITES DE STEINER

## DRAFT-VERSION

Gilles Boutte

5 mai 2002

### Abstract

We study some properties of the pencil of Steiner's line, synthetically established on the basis of the questions proposed by Antreas P. Hatzipolakis and Keith Dean in their respective messages 5336, Wednesday, May 1st, 2002, and 5339, Thursday, May 2nd, 2002 (Euler Line [Conjectures]), to group *Hyacinthos*<sup>1</sup>.

The fundamental triangle is reflected with respect to the diameter of the circumcircle perpendicular to a Steiner's line, and we define, from this second triangle, triplets of aligned points in perspective with the initial triangle.

We establish properties of the perspectors, as well as a construction of the center of the polar conic of the pivot of an isogonal circular cubic.

## 1 Rappels de résultats

Dans cette note  $ABC$  désigne un triangle non aplati du plan. Tous les centres relatifs à ce triangle seront notés  $X_n$ , conformément à la nomenclature de Clark Kimberling dans [3], ou  $E_n$ , conformément à la nomenclature d'Edward Brisse dans [2]. Toutefois nous garderons les notations traditionnelles :  $O$  pour le centre du cercle circonscrit,  $H$  pour l'orthocentre,  $I$  pour le centre du cercle inscrit,  $K$  pour le point de Lemoine.

Soit  $d$  une droite, passant par  $H$ , dont le point à l'infini est  $d_\infty$  ; si  $d_\infty^*$  est l'isogonal de  $d_\infty$ , qui appartient au cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ , la droite  $d$  est la droite de Steiner du point  $D$  diamétralement opposé à  $d_\infty^*$  sur  $\mathcal{C}$  (cf. [1], pp. 52 et 136).

Le point  $D$  et la droite  $d$  sont alors le foyer et la directrice d'une parabole  $\mathcal{P}$  inscrite dans le triangle  $ABC$  (cf. [1], pp. 66–69).

### Exemples :

1. Si  $d$  est la droite d'Euler, alors  $d_\infty = X_{30}$ ,  $d_\infty^* = X_{74}$ ,  $D = X_{110}$  et  $\mathcal{P}$  est la parabole de Kiepert ;
2. Si  $d = (HI)$ , alors  $d_\infty = X_{515}$ ,  $d_\infty^* = X_{102}$ ,  $D = X_{109}$  ;
3. Si  $d = (HK)$ , alors  $d_\infty = E_{685}$ ,  $d_\infty^* = E_{648}$ ,  $D = X_{112}$  (cf. fig. 1 p. 2).

Les symétriques de  $D$  par rapport aux côtés de  $ABC$  sont donc sur sa droite de Steiner  $d$ , ou, ce qui revient au même, les droites symétriques de  $d$  par rapport aux côtés de  $ABC$  concourent en  $D$  sur le cercle circonscrit.

Les symétriques  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  de l'orthocentre  $H$  par rapport aux côtés de  $ABC$  sont sur le cercle circonscrit : les symétriques de la droite  $d$  par rapport aux côtés de  $ABC$  sont donc déterminées par leurs points d'intersections avec  $\mathcal{C}$  sous la forme  $(A_1D)$ ,  $(B_1D)$  et  $(C_1D)$  (cf. fig. 2 p. 2).

<sup>1</sup> <http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos>

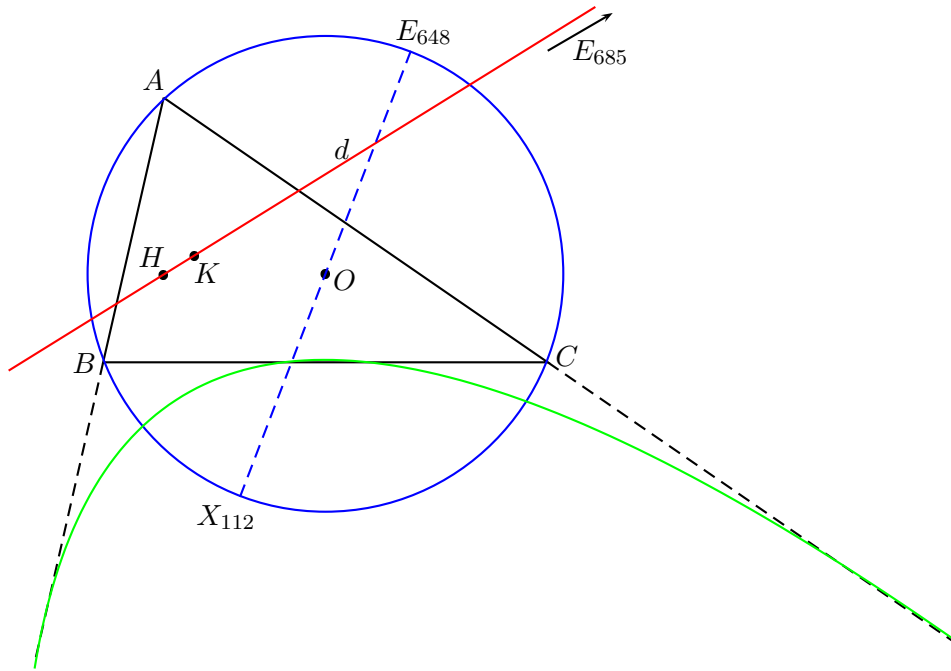


FIG. 1 – La parabole inscrite de foyer  $X_{112}$ , de directrice  $(HK)$

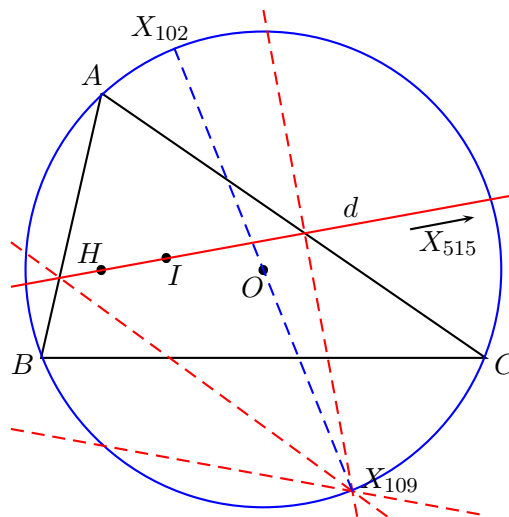


FIG. 2 – Concourance en  $X_{109}$  des symétriques de  $(HI)$  par rapport aux côtés de  $ABC$

## 2 Triangles orthologiques

Les perpendiculaires abaissées de  $A_1$  sur  $(BC)$ , de  $B_1$  sur  $(CA)$ , de  $C_1$  sur  $(AB)$  sont les hauteurs de  $ABC$  et concourent en  $H$  : les triangles  $ABC$  et  $A_1B_1C_1$  sont orthologiques, donc les perpendiculaires abaissées de  $A$  sur  $(B_1C_1)$ , de  $B$  sur  $(C_1A_1)$ , de  $C$  sur  $(A_1B_1)$  sont également concourantes (cf. [4] p.440). Mais on a

$$\begin{array}{ll}
 AH = AB_1 & \text{symétrie par rapport à } (AC) \\
 AH = AC_1 & \text{symétrie par rapport à } (AB) \\
 OB_1 = OC_1 & C \text{ est de centre } O
 \end{array}$$

donc  $(OA)$  est la médiatrice de  $[B_1C_1]$  et le point de concours envisagé est le point  $O$  (cf. fig. 3 p. 3).

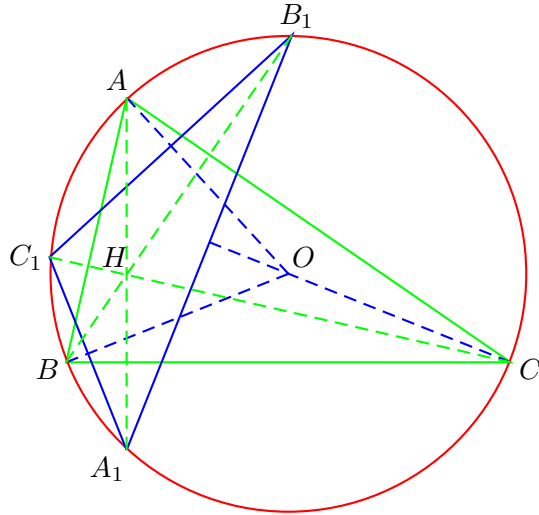


FIG. 3 – Orthologie des triangles  $ABC$  et  $A_1B_1C_1$

### 3 Une symétrie orthogonale

La perpendiculaire abaissée de  $D$  sur  $(BC)$  recoupe  $C$  en  $A_2$ , et l'on définit  $B_2$  et  $C_2$  par permutation circulaire.

Les segments  $[A_2D]$  et  $AA_1]$  sont deux cordes de  $C$  parallèles puisque perpendiculaires à  $(BC)$ ; elles ont même médiatrice  $\delta$ , diamètre de  $C$  parallèle à  $(BC)$ . On a donc :

- les droites  $(AA_2)$  et  $(A_1D)$  sont symétriques par rapport à  $\delta$ ,
- les droites  $d$  et  $(A_1D)$  sont symétriques par rapport à  $(BC)$ ,
- les droites  $\delta$  et  $(BC)$  sont parallèles,

d'où l'on déduit que les droites  $(AA_2)$  et  $d$  sont parallèles et que  $A$  et  $A_2$  sont symétriques par rapport à la perpendiculaire  $d'$  abaissée de  $O$  sur  $d$  (cf. fig. 4 p. 3).

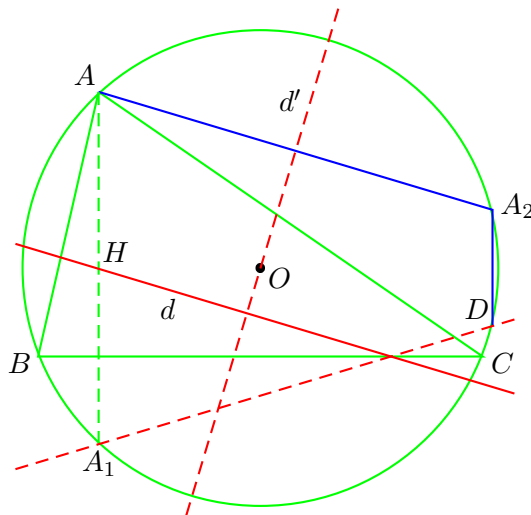


FIG. 4 – L'axe  $d'$  de la symétrie fondamentale

Les triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$  sont donc symétriques par rapport à  $d'$ , leurs droites d'Euler également. Si  $d$  elle-même est la droite d'Euler de  $ABC$ , on prouve l'une des conjectures de Antreas P. Hatzipolakis :

*Les triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$  ont même droite d'Euler.*

## 4 Étude d'un rectangle

Soit  $\Phi$  l'application qui, à un triangle  $ABC$  associe le point  $D$ , alors  $D_2 = \Phi(A_2B_2C_2)$  est le symétrique de  $D$  par rapport à  $d'$ ; comme  $d_\infty^*$  est le symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ , si  $D'$  est le symétrique de  $D_2$  par rapport à  $d'$ , le quadrilatère  $DD'd_\infty^*D_2$  est un rectangle de centre  $O$  inscrit dans  $\mathcal{C}$  (cf. fig. 5 p. 4); les directions de ses côtés ont pour points à l'infini  $d_\infty$  et  $d'_\infty$  (qui est l'isogonal de  $D$ ).

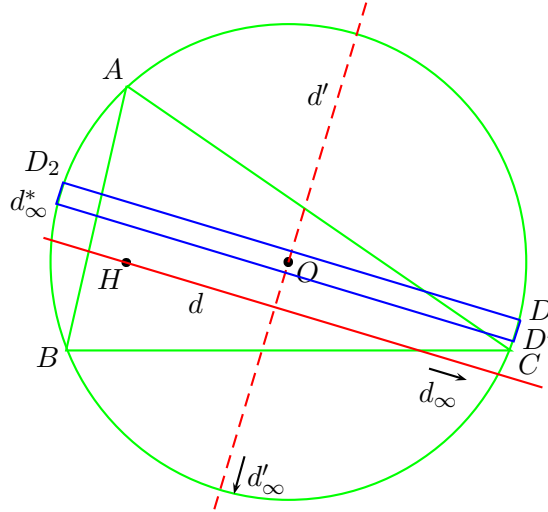


FIG. 5 – Le rectangle  $DD'd_\infty^*D_2$

Considérons la cubique isogonale  $\mathcal{K}$ , de pivot  $P = d_\infty$ , d'isogonal  $P^* = d_\infty^*$ : le pivot est à l'infini, il  $\mathcal{K}$  est une cubique circulaire dont l'asymptote non cyclique, qui est la tangente en  $P$  est la droite  $(PP^*) = (d_\infty d_\infty^*) = (D'd_\infty^*)$ . La conique polaire  $\gamma$  du pivot  $P$  est définie par les cinq points  $P, I, I_a, I_b$  et  $I_c$  (centres des cercles exinscrits), et est tangente en  $P$  à  $\mathcal{K}$ , c.-à-d. à  $(D'd_\infty^*)$ .

Comme le quadrilatère  $II_aI_bI_c$  est orthocentrique,  $\gamma$  est une hyperbole équilatère, l'une des asymptotes est  $(D'd_\infty^*)$  et l'autre est parallèle à  $d'$ .

Le centre de cette hyperbole appartient au cercle d'Euler du triangle  $I_aI_bI_c$  auquel elle est circonscrite, qui n'est autre que  $\mathcal{C}$ . Comme le centre est sur l'asymptote  $(D'd_\infty^*)$ , il s'agit de  $D'$  ou de  $d_\infty^*$ . Ce dernier point, isogonal du pivot, ne peut pas être le centre de la conique polaire  $\gamma$ , qui est donc le point  $D'$ . Lorsque  $d$  est la droite d'Euler,  $\mathcal{K}$  est la cubique de Neuberg de  $ABC$  et ce résultat avait déjà été montré par Peter Yff le 23 mai 1999..

Remarquons que  $\mathcal{K}$  de pivot  $P = d_\infty$  admet pour foyer singulier le point  $F_s = D$  diamétralement opposé à  $P^* = d_\infty^*$  sur  $\mathcal{C}$ , et l'on a le résultat :

*Le centre de la conique polaire du pivot d'une cubique isogonale circulaire est la projection orthogonale de son foyer singulier sur son asymptote non cyclique.*

## 5 Alignements et perspectives

L'hexagone  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  est inscrit dans le cercle  $\mathcal{C}$  donc, en usant du théorème de Pascal, les points  $A_3 = (B_1C_2) \cap (C_1B_2)$ ,  $B_3 = (C_1A_2) \cap (A_1C_2)$  et  $C_3 = (A_1B_2) \cap (B_1A_2)$  sont alignés. Ce résultat, intéressant en lui-même, peut être amélioré.

La donnée de la droite  $d$  fournit la droite  $d'$ ,  $B_2$  et  $C_2$  symétriques de  $B$  et  $C$  par rapport à  $d'$ ; on peut aussi définir  $B_2$  et  $C_2$  comme les seconds points d'intersection des parallèles à  $d$ , menées respectivement par  $B$  et  $C$  avec le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$ . Lorsque  $d$  varie (dans le faisceau de droites  $\mathcal{D}_H$  de sommet  $H$ ), on définit,

<sup>2</sup> Dans le cas particulier de la droite d'Euler, on a  $D' = X_{476}$  et  $D_2 = X_{477}$ , point de Tixier.

par  $d \mapsto (B_1C_2)$ , une homographie du faisceau de droites  $\mathcal{D}_H$  dans le faisceau de droites  $\mathcal{D}_{B_1}$  de sommet  $B_1$  : le lieu du point  $A'_3$ , intersection des droites qui se correspondent dans cette homographie, est une conique  $\Gamma$  passant par  $H$  et  $B_1$  ; pour déterminer complètement cette conique, il suffit donc d'en donner trois autres points (cf. fig. 6 p. 5).

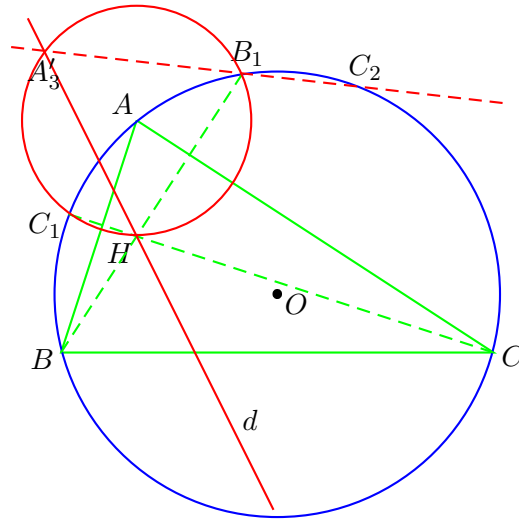


FIG. 6 – Le lieu du point  $A'_3$

Lorsque  $d$  est la hauteur  $(CH)$ ,  $C_2 = C_1$ . Par suite  $A'_3 = d \cap (B_1C_2) = (CC_1) \cap (B_1C_1) = C_1$  qui est donc sur  $\Gamma$ .

Soit  $\mathcal{I}$  un point cyclique ; lorsque  $d = (HT)$ , la parallèle menée par  $C$  à  $d$  est  $(CT)$  qui recoupe  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{I}$  donc  $C_2 = \mathcal{I}$  et  $A'_3 = \mathcal{I}$  est sur  $\Gamma$  qui par suite est un cercle.

*Le lieu du point  $A'_3$ , lorsque  $d$  varie, est le cercle  $\mathcal{C}_A$  circonscrit au triangle  $HB_1C_1$ , de centre  $A$  ; autrement dit le point  $A'_3$  est la seconde intersection (autre que  $H$ ) de  $d$  avec ce cercle.*

On montrerait de même que : le lieu du point  $A''_3$  intersection de  $d$  et  $(C_1B_2)$ , lorsque  $d$  varie, est également le cercle  $\mathcal{C}_A$  ; autrement dit le point  $A''_3$  est la seconde intersection de  $d$  avec ce cercle. Finalement  $A'_3 = A''_3$  est l'intersection de  $(B_1C_2)$  et de  $(C_1B_2)$ , c.-à-d.  $A_3$  qui est donc sur  $d^3$  ; on montre, par permutation circulaire, les résultats analogues pour les points  $B_3$  et  $C_3$  dont les lieux respectifs, lorsque  $d$  varie, sont les cercles  $\mathcal{C}_B$  et  $\mathcal{C}_C$ .

*Les points  $A_3, B_3$  et  $C_3$  sont alignés sur  $d$ .*

Soit alors le point  $X$ , intersection de  $(BB_3)$  et  $(CC_3)$  (cf. fig. 7 p. 6).

Considérons l'hexagone  $BXCC_1A_2B_1$  ; ses côtés opposés se coupent en

- $B_3$  pour  $(BX)$  et  $(C_1A_2)$  ;
- $C_3$  pour  $(CX)$  et  $(B_1A_2)$  ;
- $H$  pour  $(BB_1)$  et  $(CC_1)$ .

Ces trois points sont alignés sur  $d$ , donc les sommets de l'hexagone sont cocycliques et  $X$  appartient à  $\mathcal{C}$ , les droites  $(BB_3)$  et  $(CC_3)$  sont sécantes sur  $\mathcal{C}$ . Un raisonnement analogue sur l'intersection de  $(AA_3)$  et  $(CC_3)$  prouve finalement que :

*Les triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$  sont en perspective de centre  $X$  sur le cercle circonscrit à  $ABC$ .*

Mais on peut préciser cette perspective par orthologie (cf. fig. 8 p. 6).

Par définition même, les perpendiculaires abaissées de  $A_2$  sur  $(BC)$ , de  $B_2$  sur  $(CA)$ , et de  $C_2$  sur  $(AB)$  concourent en  $D$ . Les triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$  sont orthologiques et les perpendiculaires abaissées de  $A$

<sup>3</sup> Nous laissons au lecteur le soin de rédiger une preuve directe, analogue à la précédente, du fait que le lieu de  $A_3$  est le cercle  $\mathcal{C}_A$ .

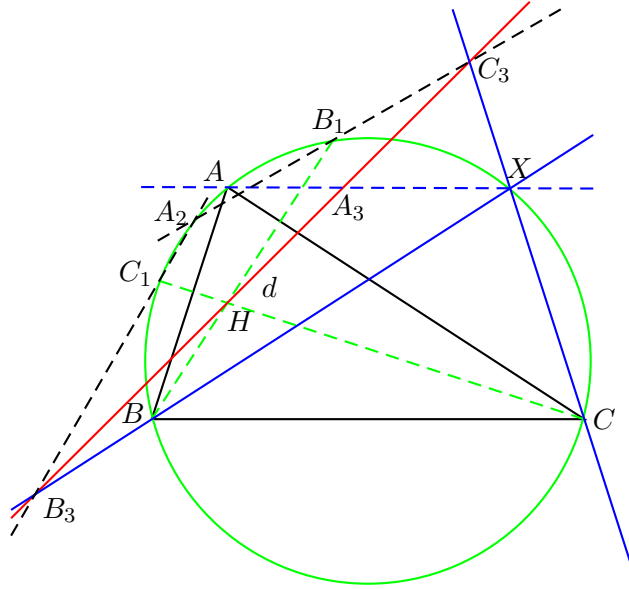


FIG. 7 – La perspective des triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$

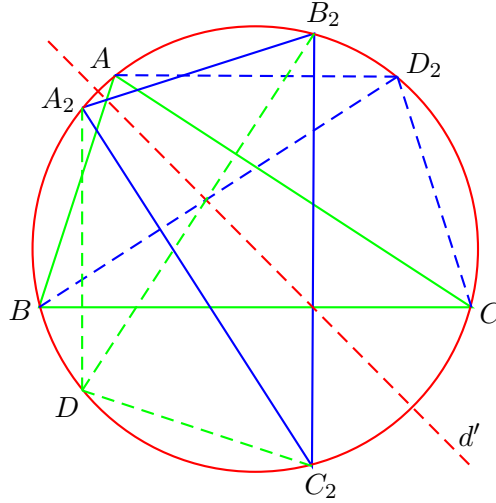


FIG. 8 – Orthologie des triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$

sur  $(B_2C_2)$ , de  $B$  sur  $(C_2A_2)$ , et de  $C$  sur  $(A_2B_2)$  sont concourantes, en  $D_2$ , puisque  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$  sont symétriques par rapport à  $d'$ .

Soit  $X_a$  l'intersection de  $d$  et  $(AD_2)$ ,  $D_a$  celle de  $d$  et  $(AB)$ ,  $Y_a$  celle de  $d$  et  $B_2C_2$ ,  $Z_a$  celle de  $(AD_2)$  et  $(B_2C_2)$ ,  $H_a$  le pied de la hauteur issue de  $A$  dans  $ABC$  (cf. fig. 9 p. 7).

On a les égalités d'angle suivantes ( $\delta$  désigne un angle droit) :

$$\begin{aligned} (\widehat{X_a A}, \widehat{X_a H}) &= (\widehat{X_a Z_a}, \widehat{X_a Y_a}) = \delta - (\widehat{Y_a X_a}, \widehat{Y_a Z_a}) && Z_a X_a Y_a \text{ est rectangle en } Z_a \\ (\widehat{D_a H}, \widehat{D_a H_a}) &= -(\widehat{Y_a X_a}, \widehat{Y_a Z_a}) && \text{symétrie par rapport à } d' \\ (\widehat{D_a H}, \widehat{D_a H_a}) &= \delta - (\widehat{H D_a}, \widehat{H H_a}) = \delta - (\widehat{H X_a}, \widehat{H A}) && H_a D_a H \text{ est rectangle en } H_a \end{aligned}$$

donc  $(\widehat{X_a A}, \widehat{X_a H}) = -(\widehat{H X_a}, \widehat{H A})$ , le triangle  $AH X_a$  est isocèle de sommet  $A$  et  $X_a$  appartient au cercle  $\mathcal{C}_A$ , c'est la seconde intersection de ce cercle avec  $d$ , c.-à-d.  $A_3$ ; autrement dit la droite  $(AA_3)$  passe par  $D_2$ .

*Le centre de perspective des triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$  est le point  $D_2$  du cercle circonscrit.*

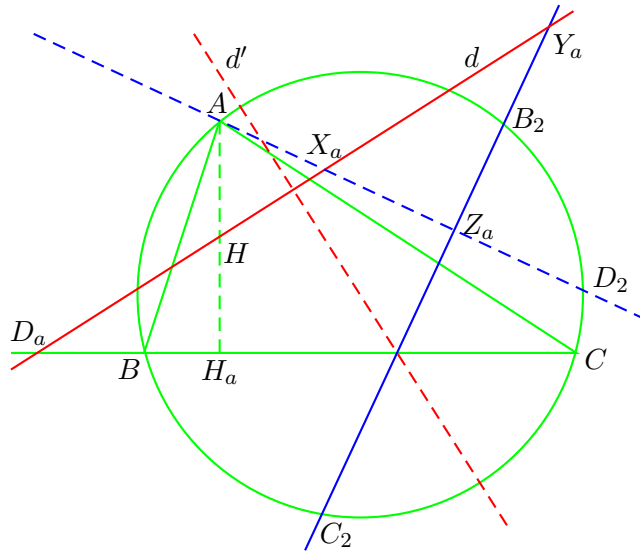


FIG. 9 – Le triangle isocèle  $AHX_a$

## 6 D'autres alignements indépendants des droites de Steiner

Nous remercions Keith Dean de nous avoir indiqué les propriétés qui font l'objet de ce paragraphe.

L'hexagone  $AB_1CA_1BC_1$  est inscrit dans  $\mathcal{C}$  donc, en usant du théorème de Pascal, les points  $A_4 = (BC_1) \cap (CB_1)$ ,  $B_4 = (CA_1) \cap (AC_1)$  et  $C_4 = (AB_1) \cap (BA_1)$  sont alignés. Ce résultat peut être démontré par une autre méthode qui fournit des propriétés supplémentaires (cf. fig. 10 p. 7).

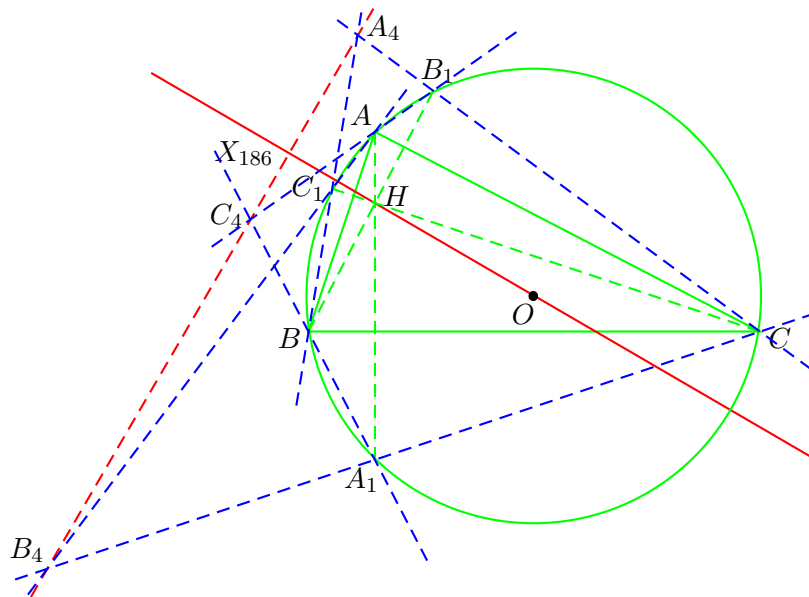


FIG. 10 – La polaire de  $H$  par rapport à  $\mathcal{C}$

Le quadrilatère  $BB_1CC_1$  est inscrit dans  $\mathcal{C}$  et ses côtés opposés se coupent respectivement en  $H$  et  $A_4$  qui sont ainsi deux points conjugués par rapport à  $\mathcal{C}$ ;  $A_4$  appartient à la polaire de  $H$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .

*Les points  $A_4$ ,  $B_4$  et  $C_4$  sont alignés sur la polaire de  $H$  par rapport au cercle circonscrit, perpendiculaire à la droite d'Euler en l'inverse  $X_{186}$  de  $H$  par rapport à  $\mathcal{C}$ .*

## Références

- [1] Yvonne et René SORTAIS. *La géométrie du triangle*. HERMANN, Paris, 1987.
- [2] E. BRISSE. Table of centers on named objects in triangle geometry of degree 1-2-3-4. <http://pages.infinit.net/spqrsncf/ngo.htm>, 2002.
- [3] C. KIMBERLING. Encyclopedia of triangle centers. <http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>, 2000.
- [4] Eugène ROUCHÉ et Charles DE COMBEROUSSE. *Traité de géométrie*. GAUTHIER-VILLARS, Paris, 6<sup>e</sup>édition, 1891.