Об одной задаче построения

Жиль Бут

12 декабря 2002 г.

Abstract

This paper answers a question from Luís Lopes in his message 4440, Wednesday, November 28, 2001 ("german" triangle construction), to group *Hyacinthos* [1], on the construction of a triangle, given the altitude h_a, the median m_b, the internal bissector b_A [2].

In the article «Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника» by V. B. Fursenko ([2]), this problem appears under the nummer 232, with the mention "unsolvable". It appears also in the book *Die Konstruktion von Dreiecken* by Herterich ([1]) under the nummer 179.

1 Анализ задачи

Рассмотрим треугольника ABC с высотой $AH_a = h_a$, медианой $BB_1 = m_b$, биссектрисой $AS_a = b_A$. Пусть M' – середина отрезка $[AH_a]$, B_2 – точка, симметричная точки B относительно биссектрисы (AS_a), M точка такая, что BH_aMM' – параллелограмм.

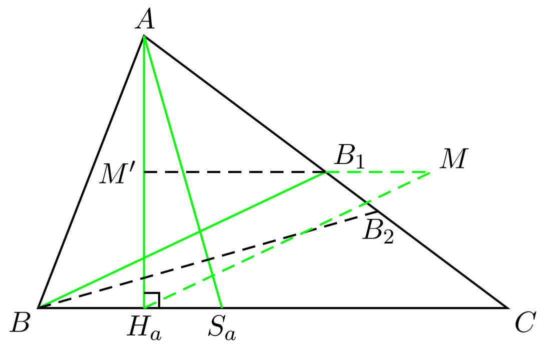

Рис. 1: Построенный треугольник

Мы имеем простые результаты :

- треугольник AH_aS_a прямоугольный с гипотенузой AS_a итак $h_a \leqslant b_A$;
- треугольник $H_aM'M$ прямоугольный с гипотенузой H_aM итак $h_a \leqslant 2m_b$;
- точки A, B_1, B_2 лежат на одной и той же прямой ;
- точка M лежит на серединном перпендикуляре $(M'B_1)$ отрезка $[AH_a]$ и на окружности центра H_a, радиюса m_b.

Равенство $h_a = b_A$ эквивалентно тому делу, что треугольник ABC – равнобедренный. Задача построения ABC с знанием h_a, m_b, $b_A = h_a$ преобразовывается к его построению с знанием трех медиан $m_A = h_a$, m_b и $m_c = m_b$, задача, которой решение известно (задача 273 в [2]). Мы допустим в дальнейшем, что $h_a \neq b_A$.

[1] `http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos`

[2] See the messages 4448, 4457, 4459, 4461, on this subject.

2 Разрешимость задачи

Мы определяем h_a, m_b и b_A из формул (39), (47) и (51) в [2]) :

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \tag{1}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \tag{2}$$

$$b_A = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c} \tag{3}$$

Неравенства $h_a < b_A$ и $h_a \leqslant 2m_b$ выходят из свойство гипотенузы в треугольниках AH_aS_a и $H_aM'M$, легко построящахся с знанием h_a, m_b и b_A ; кажется интересно определить длину третьей стороны этих треугольников (удваиваем стороны $M'M$, чтобы не иметь знаменатель) :

$$K = \sqrt{b_A^2 - h_a^2} > 0 \tag{4}$$

$$L = \sqrt{4m_b^2 - h_a^2} \tag{5}$$

итак преобразуем формул (1), (2) и (3) к многосченному виду :

$$4a^2h_a^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \tag{1'}$$

$$h_a^2 + L^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \tag{2'}$$

$$(b+c)^2(h_a^2+K^2) = bc(a+b+c)(b+c-a) \tag{3'}$$

Исключая a из формул $(1')$ и $(2')$ и потом из формул $(2')$ и $(3')$, придем к уравнениям :

$$(9h_a^2+L^2)(h_a^2+L^2) - 8(3h_a^2+L^2)c^2 + 2(3h_a^2-L^2)b^2 + (b^2-4c^2)^2 = 0 \tag{6}$$

$$2(K^2+h_a^2)(b^2+c^2) + (5h_a^2+4K^2+L^2)bc - bc(b+2c)^2 = 0 \tag{7}$$

Исключая b из этих обеих формул, придем к тому, что произведение трех следующих множителей – равно нулю :

$$f_1 = L^2 + h_a^2 - c^2 \tag{8}$$

$$f_2 = 16K^2c^4 - (9h_a^4 + 30K^2h_a^2 - 4KLh_a^2 + 9K^4 + 4K^3L + 4K^2L^2)c^2 + (h_a^2+K^2)^2(9h_a^2+L^2) \tag{9}$$

$$f_3 = 16K^2c^4 - (9h_a^4 + 30K^2h_a^2 + 4KLh_a^2 + 9K^4 - 4K^3L + 4K^2L^2)c^2 + (h_a^2+K^2)^2(9h_a^2+L^2) \tag{10}$$

Из приведения f_1 к нулю придем к $c = \sqrt{L^2+h_a^2}$ и, вкладывая эту величину в формулу (6), имеем :

$$b^4 - 2(5L^2+h_a^2)b^2 + (9L^2+h_a^2)(L^2+h_a^2) = 0$$

$$\sqrt{L^2+h_a^2}b^3 - 2(K^2-4L^2-h_a^2)b^2 + \sqrt{L^2+h_a^2}(4K^2-3L^2+h_a^2)b + 2(K^2+h_a^2)(L^2+h_a^2) = 0$$

У этой системы только одно решение $b = -\sqrt{L^2+h_a^2}$, не соответствующее.

Из приведения f_2 или f_3 к нулю придем к биквадратнами уравнениями ; если $x = c^2$, эти уравнения пишутся :

$$\alpha x^2 - \beta_2 x + \gamma = 0 \qquad ; \qquad \alpha x^2 - \beta_3 x + \gamma = 0 \tag{11}$$

где $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$, и с дискриминантами :

$$\Delta_1 = [9h_a^4 + 2Kh_a^2(7K+2L) + K^2(2L-K)^2 + 8K^4](3h_a^2 - 2KL - 3K^2)^2 > 0$$

$$\Delta_2 = [2h_a^2(4h_a^2+7K^2) + (h_a^2-2KL)^2 + K^3(9K+4L)](3h_a^2 + 2KL - 3K^2)^2 > 0$$

У каждого из уравнений (11) две реальные положительные решения : f_2 и f_3 – равны нулю за четырех величин длины c, которые можно построить.

Построив c, нужно построить ABC с знанием c, h_a и m_b, а имеем такое построение (задача 60 в [2]).

3 Одна лемма

Даны, в плосости, прямая d, точка A лежащая на d и вектор $\vec{u}$, геометрическое место точек M в плоскости таких, что поступательный образ M_1 точки M за вектором $\vec{u}$, симметричная точка M_2 точки M относительно d, и точка A лежащие на одной и той же прямой, – гипербола переходящая через A и через его поступательный образ A' за вектором $-\vec{u}$. Ее центр – середина O отрезка $[AA']$, ее асимптоты, одна – параллельна, другая перпендикулярна прямой d.

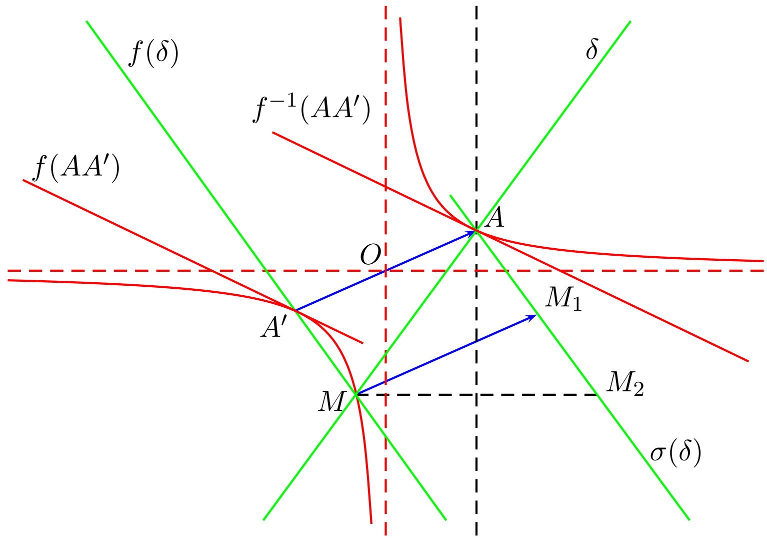

Рис. 2: Гипербола как геометрическое место точки M

Доказательство : Пусть σ осевая симметрия относительно d, τ поступательное движение за вектором $-\vec{u}$, $A' = \tau(A)$, $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{D}_{A'}$ пучки прямыш, переходящиш через A и A' соответственно ; σ делает инволюцию в пучке $\mathcal{D}_A$ и τ делает гомографию из $\mathcal{D}_A$ в $\mathcal{D}_{A'}$, итак $\tau \circ \sigma$ делает гомографию f из $\mathcal{D}_A$ в $\mathcal{D}_{A'}$.

Замечаем : дана любая прямая в $\mathcal{D}_A$, прямые $\sigma(d)$ и $f(d)$ – параллельны.

В случае, когда M равен A, M_2 тоже равен A ; точки A, M_1 и M_2 лежат на одной и той же прямой : ищемое место переходит через A.

В случае, когда M не равен A, эти две точки определяют прямую δ в $\mathcal{D}_A$, и M_2 лежит на $\sigma(\delta)$ в $\mathcal{D}_A$; если M_1 тоже лежит на $\sigma(\delta)$, то M лежит на $\tau \circ \sigma(\delta)$ в $\mathcal{D}_{A'}$, и обратно : геометрическое место точки M – место пересечений прямых δ и $f(\delta)$, это коническое сечение γ, переходящое через A и A' ; касательная к нему через A – $f^{-1}(AA')$, касательная через A' – $f(AA')$.

Обе прямые $f^{-1}(AA')$ и $f(AA')$ – параллельны прямой $\sigma(AA')$: A и A' диаметрально противоположны на γ : его центр – середина O отрезка $[AA']$.

Если δ – параллельна прямой d, то $\sigma(\delta)$ тоже ; если δ – перпендикулярна прямой d, то $\sigma(\delta) = \delta$. Так как $f(\delta)$ всегда параллельна прямой $\sigma(\delta)$, заключаем, что, в случаях, где δ параллельна или перпендикулярна прямой d, прямые δ и $f(\delta)$ – параллельны : точки по бесконечности на d и на ей перпендикуляных прямых лежат на ищемом месте ; это место – гипербола.

4 Действительное построение

Даны длины h_a, m_b и b_A такие, что $h_a \leqslant 2m_b$ и $h_a \leqslant b_A$, построим прямоугольный треугольник AH_aS_a такой, что $AH_a = h_a$ и $AS_a = b_A$, серединный перпендикуляр δ отрезка $[AH_a]$ и окружность центра H_a и радиуса m_b, секающую к δ в M_1 и M_2. Четырехугольник $AM_1H_aM_2$ – ромб (см. рис. 3) ; треугольник ABC, чтобы быть решение задачи, должен удовлетворять условия :

- B и C лежат на (H_aS_a) ;
- $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_1}$ или $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_2}$;
- A, B_1 и B_2 лежат на одной и той же прямой.

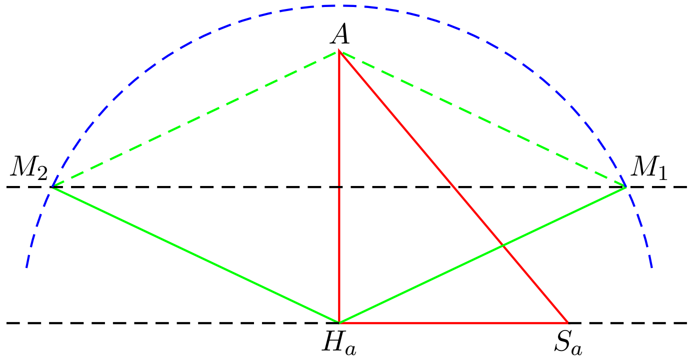

Рис. 3: Основа построения

Построим треугольники в случае $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_1}$. Третье условие ставит B на гиперболу $\mathcal{H}$ (см. § 3), переходящую через A и M_2, и можно построить :

- ее центр O, середина отрезка $[AM_2]$;
- ее асимптоты, d_1 параллельна прямой (AS_a), d_2 перпендикулярна прямой (AS_a).

Надо построить точки сечения этой гиперболы с прямой (H_aS_a) ; эти точки B' и B'' – реальны, потому что A и M_2, диаметрально противоположные на $\mathcal{H}$, лежат в одной и той же полуплоскости, образовавшейся прямой (H_aS_a).

Легко построим середину Q отрезка $[B'B'']$: это тоже середина отрезка $[Q_1Q_2]$, расделывавшего асимптотами d_1 и d_2 на прямой (H_aS_a).

Также построим точки сечения R_1 и R_2 прямых d_1 и d_2 с прямоуи AH_a, потом середину R отрезка $[R_1R_2]$, симметричную точку H точки A относительно R и симметричную точку H' точки H относительно O (см. рис. 4).

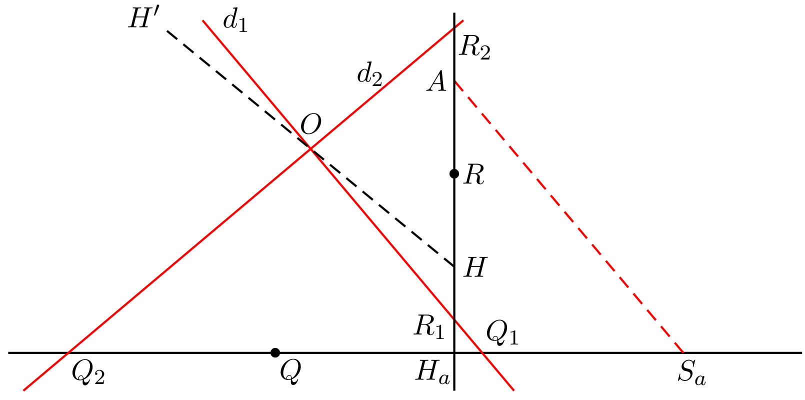

Рис. 4: Завяска построения

Треугольник $AB'B''$, для которого $[AH_a]$ – одна из высот, вневписанный в гиперболе $\mathcal{H}$ с перпендилулярными асимптотами[3] ; его ортоцентр тоже лежит на $\mathcal{H}$: это точка H, итак точка H', диаметрально противоположная точке H на $\mathcal{H}$, – четвертая точка сечения гиперболы с описанным окружностью треугольника $AB'B''$. Можно построить центр Ω этой окружности, секая серединные перпендикуляры отрезков $[AH']$ и $[B'B'']$ (перпендикуляр прямой (H_aS_a) проходящий через Q), потом самую окружность и точки B' и B'' на (H_aS_a) (см. рис. 5 стр. 5).

[3] По-английски «rectangular hyperbola» ; не знаю по-русски.

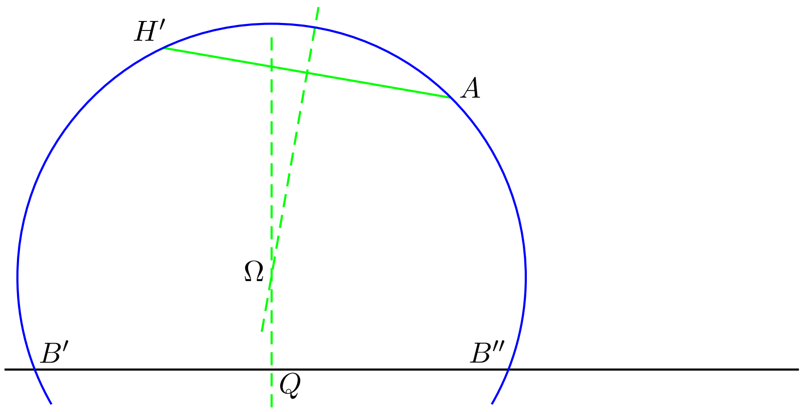

Рис. 5: Точки B' и B''

Выбирая B' или B'' как вершину B треугольника, построим симметричную точку B_2 точки B относительно (AS_a), и кончим построение, секая прямых (AB_2) и (H_aS_a), чтобы построить C.

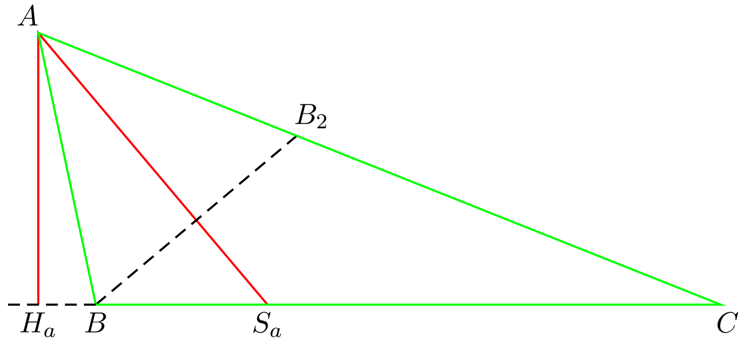

Рис. 6: Случай, когда внутренная биссектриса

Построя треугольник от B' и B'', получим два треугольника : (AS_a) – внутренная биссектриса первого (см. рис. 6 стр. 5), а внешная биссектриса второго (см. рис. 7 стр. 6).

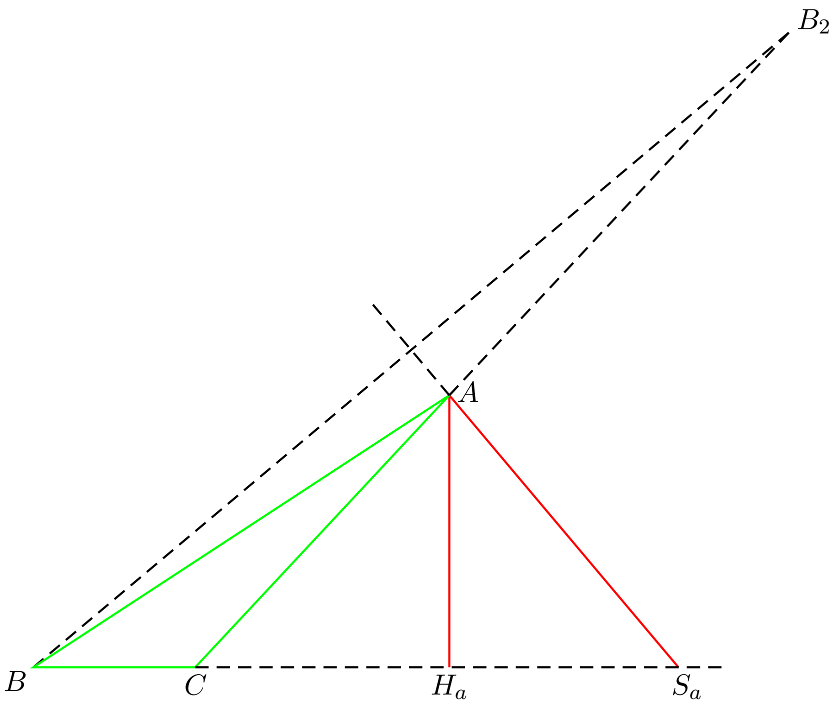

Рис. 7: Случай, когда внешная биссектриса

С аналогичным построением от середины O отрезка $[AM_1]$ также получим еще другие два треугольника.

Список литературы

[1] K. Herterich. *Die Konstruktion von Dreiecken.* Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[2] В. Б. Фурсенко. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. *Математика в школе*, 5 : стр. 4–30, 6 : стр. 21–45, 1937.