Un problème de construction

Gilles Boutte
Ancien élève de l'École Normale Supérieure

12 décembre 2002

Abstract

This paper answers a question from Luís Lopes in his message 4440, Wednesday, November 28, 2001 ("german" triangle construction), to group *Hyacinthos* [1], on the construction of a triangle, given the altitude h_a, the median m_b, the internal bissector b_A [2].

In the article «Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника» by V. B. Fursenko ([2]), this problem appears under the nummer 232, with the mention "unsolvable". It appears also in the book *Die Konstruktion von Dreiecken* by Herterich ([1]) under the nummer 179.

1 Analyse du problème

Considérons un triangle ABC de hauteur $AH_a = h_a$, de médiane $BB_1 = m_b$, de bissectrice intérieure $AS_a = b_A$. Soit M' le milieu de $[AH_a]$, B_2 le symétrique orthogonal de B par rapport à la bissectrice (AS_a), M tel que BH_aMM' soit un parallèlogramme.

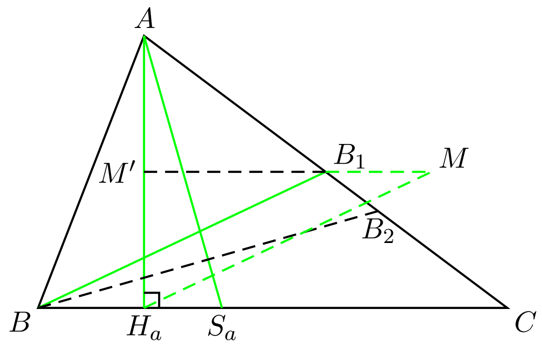

Fig. 1 – Le triangle à construire

Nous avons les résultats triviaux :
- le triangle AH_aS_a est rectangle en H_a et $h_a \leqslant b_A$;
- le triangle $H_aM'M$ est rectangle en M' et $h_a \leqslant 2m_b$;
- les points A, B_1, B_2 sont alignés ;
- M appartient à la médiatrice $(M'B_1)$ de $[AH_a]$ ainsi qu'au cercle de centre H_a et de rayon m_b.

L'égalité $h_a = b_A$ a lieu si, et seulement si, le triangle ABC est isocèle. Le problème de construire ABC connaissant h_a, m_b, $b_A = h_a$ se ramène à sa construction connaissant les trois médianes $m_A = h_a$, m_b et $m_c = m_b$, problème classique dont la solution est bien connue (problème 273 *in* [2]). Nous supposerons désormais $h_a \neq b_A$.

[1] `http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos`
[2] See the messages 4448, 4457, 4459, 4461, on this subject.

2 Constructibilité

Nous partons des formules usuelles donnant h_a, m_b et b_A (cf. (39), (47) et (51) *in* [2]) :

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \tag{1}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2} \tag{2}$$

$$b_A = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c} \tag{3}$$

Nous avons obtenu au paragraphe précédent les conditions nécessaires à l'existence du triangle ABC :

$$h_a < b_A \qquad ; \qquad h_a \leqslant 2m_b$$

inégalités immédiates dans les triangles rectangles AH_aS_a et $H_aM'M$ qui peuvent être facilement construits à partir des données h_a, m_b et b_A ; il paraît donc intéressant d'introduire la longueur du troisième côté de ces triangles (en fait nous doublons la longueur pour $M'M$ afin d'éviter les dénominateurs) :

$$K = \sqrt{b_A^2 - h_a^2} > 0 \tag{4}$$

$$L = \sqrt{4m_b^2 - h_a^2} \tag{5}$$

ce qui permet de réécrire les équations (1), (2) et (3) sous forme polynômiale :

$$4a^2h_a^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \tag{1'}$$

$$h_a^2 + L^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 \tag{2'}$$

$$(b+c)^2(h_a^2+K^2) = bc(a+b+c)(b+c-a) \tag{3'}$$

L'élimination de a entre les équations (1′) et (2′) puis entre les équations (2′) et (3′) conduit à :

$$(9h_a^2+L^2)(h_a^2+L^2) - 8(3h_a^2+L^2)c^2 + 2(3h_a^2-L^2)b^2 + (b^2-4c^2)^2 = 0 \tag{6}$$

$$2(K^2+h_a^2)(b^2+c^2) + (5h_a^2+4K^2+L^2)bc - bc(b+2c)^2 = 0 \tag{7}$$

L'élimination de b entre ces deux équation conduit à la nullité du produit des trois facteurs suivants :

$$f_1 = L^2 + h_a^2 - c^2 \tag{8}$$

$$f_2 = 16K^2c^4 - (9h_a^4 + 30K^2h_a^2 - 4KLh_a^2 + 9K^4 + 4K^3L + 4K^2L^2)c^2 + (h_a^2+K^2)^2(9h_a^2+L^2) \tag{9}$$

$$f_3 = 16K^2c^4 - (9h_a^4 + 30K^2h_a^2 + 4KLh_a^2 + 9K^4 - 4K^3L + 4K^2L^2)c^2 + (h_a^2+K^2)^2(9h_a^2+L^2) \tag{10}$$

La nullité du facteur f_1 conduit à $c = \sqrt{L^2+h_a^2}$ qui reporté dans (6) fournit :

$$b^4 - 2(5L^2+h_a^2)b^2 + (9L^2+h_a^2)(L^2+h_a^2) = 0$$

$$\sqrt{L^2+h_a^2}\,b^3 - 2(K^2-4L^2-h_a^2)b^2 + \sqrt{L^2+h_a^2}(4K^2-3L^2+h_a^2)b + 2(K^2+h_a^2)(L^2+h_a^2) = 0$$

Ce système admet la solution unique $b = -\sqrt{L^2+h_a^2}$ qui ne convient pas.

La nullité de l'un des facteurs f_2 ou f_3 conduit à une équation bicarrée ; avec $x = c^2$, ces équations bicarrées s'écrivent :

$$\alpha x^2 - \beta_2 x + \gamma = 0 \qquad ; \qquad \alpha x^2 - \beta_3 x + \gamma = 0 \tag{11}$$

avec $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ et les disciminants :

$$\Delta_1 = [9h_a^4 + 2Kh_a^2(7K+2L) + K^2(2L-K)^2 + 8K^4](3h_a^2 - 2KL - 3K^2)^2 > 0$$

$$\Delta_2 = [2h_a^2(4h_a^2+7K^2) + (h_a^2-2KL)^2 + K^3(9K+4L)](3h_a^2 + 2KL - 3K^2)^2 > 0$$

Les équations (11) admettent chacune deux racines réelles positives : f_2 et f_3 s'annulent chacun pour deux valeurs positives constuctibles de c.

Lorsque c est construit, on est ramené à construire le triangle ABC connaissant c, h_a et m_b, ce qui est possible et classique (problème 60 *in* [2]).

3 Un lemme

Étant donnés, dans un plan, une droite d, un point A sur d et un vecteur $\vec{u}$, le lieu géométrique des points M du plan tels que le translaté M_1 de M par le vecteur $\vec{u}$, le symétrique orthogonal M_2 de M par rapport à d et le point A soient alignés, est une hyperbole équilatère passant par A et le translaté A' de A par le vecteur $-\vec{u}$. Son centre O est le milieu de $[AA']$, ses asymptotes sont l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à d.

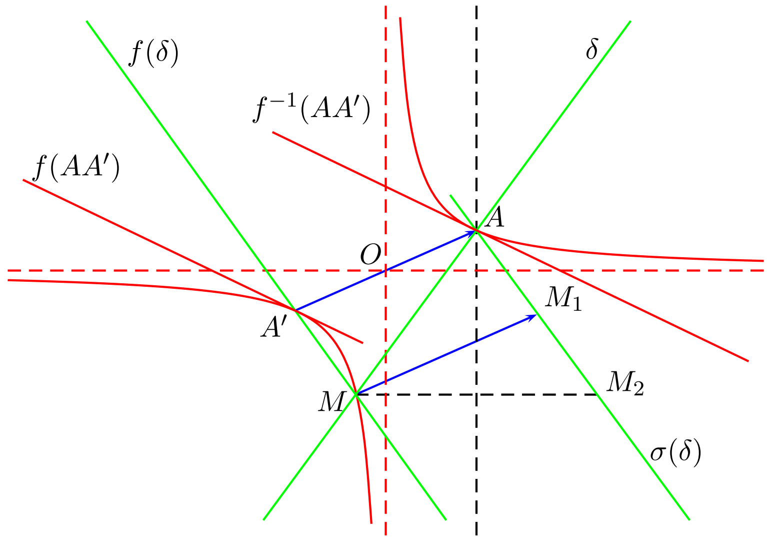

FIG. 2 – L'hyperbole équilatère lieu de M

PREUVE : Notons σ la symétrie orthogonale par rapport à d, τ la translation de vecteur $-\vec{u}$, A' l'image de A par τ, $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_{A'}$ les faisceaux de droites concourantes en A et A' respectivement ; σ induit une involution de $\mathcal{D}_A$ et τ une homographie de $\mathcal{D}_A$ dans $\mathcal{D}_{A'}$, donc $\tau \circ \sigma$ induit une homographie f de $\mathcal{D}_A$ dans $\mathcal{D}_{A'}$.

Remarquons : pour toute droite d de $\mathcal{D}_A$, les droites $\sigma(d)$ et $f(d)$ sont parallèles.

Si M est en A, M_2 coïncide avec A ; les points A, M_1 et M_2 sont alignés : A appartient au lieu cherché.

Si M est distinct de A, ces deux points définissent une droite δ de $\mathcal{D}_A$, et M_2 appartient à la droite $\sigma(\delta)$ de $\mathcal{D}_A$; M_1 appartient lui aussi à cette droite si, et seulement si, M appartient à la droite $\tau \circ \sigma(\delta)$ de $\mathcal{D}_{A'}$: le lieu de M est le lieu des intersections de δ et de $f(\delta)$, c'est une conique γ passant par A et A', la tangente en A est $f^{-1}(AA')$, la tangente en A' est $f(AA')$.

Les droites $f^{-1}(AA')$ et $f(AA')$ sont toutes deux parallèles à $\sigma(AA')$: A et A' sont diamétralement opposés sur γ dont le centre est par suite le milieu O de $[AA']$.

Si δ est parallèle à d, $\sigma(\delta)$ est parallèle à δ ; si δ est perpendiculaire à d, $\sigma(\delta)$ est confondue avec δ. Comme $f(\delta)$ est, dans tous les cas, parallèle à $\sigma(\delta)$, on conclut que, pour δ parallèle ou perpendiculaire à d, les droites δ et $f(\delta)$ sont parallèles : les points à l'infini dans la direction de d et dans la direction perpendiculaire appartiennent au lieu cherché ; ce lieu est donc une hyperbole, équilatère puisque les asymptotes sont perpendiculaires.

4 La construction effective

Étant donnés les longueurs h_a, m_b et b_A telles que $h_a \leqslant 2m_b$ et $h_a \leqslant b_A$ (conditions nécessaires, cf. § 1), construisons un triangle rectangle AH_aS_a avec $AH_a = h_a$ et $AS_a = b_A$, la médiatrice δ de $[AH_a]$ et le cercle de centre H_a et de rayon m_b, sécant à δ en M_1 et M_2. Le quadrilatère $AM_1H_aM_2$ est un losange (cf. fig. 3 p. 4) ; un triangle ABC solution du problème doit satisfaire aux conditions :

- B et C appartiennent à la droite (H_aS_a) ;
- $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_1}$ ou $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_2}$;

– A, B_1 et B_2 sont alignés.

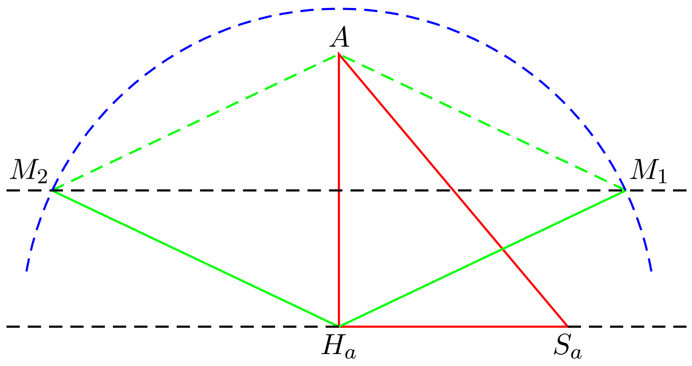

FIG. 3 – La base de la construction

Nous construirons les triangles pour lesquels $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{H_aM_1}$. La dernière condition place B sur une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ (cf. § 3), passant par A et M_2, pour laquelle on peut construire :

– le centre O, milieu de $[AM_2]$;

– les asymptotes, d_1 parallèle à (AS_a), d_2 perpendiculaire à (AS_a).

Il faut donc construire les points d'intersection de cette hyperbole et de la droite (H_aS_a) ; ces points d'intersection B' et B'' sont réels car les points A et M_2, diamétralement opposés sur $\mathcal{H}$, sont d'un même côté de (H_aS_a).

On peut facilement construire le milieu Q de $[B'B'']$ qui est également le milieu du segment $[Q_1Q_2]$ déterminé par les asymptotes d_1 et d_2 sur la droite (H_aS_a).

On peut de même construire les intersections R_1 et R_2 de d_1 et d_2 avec la droite AH_a, puis le milieu R de $[R_1R_2]$, le symétrique H de A par rapport à R et le symétrique H' de H par rapport à O (cf. fig. 4).

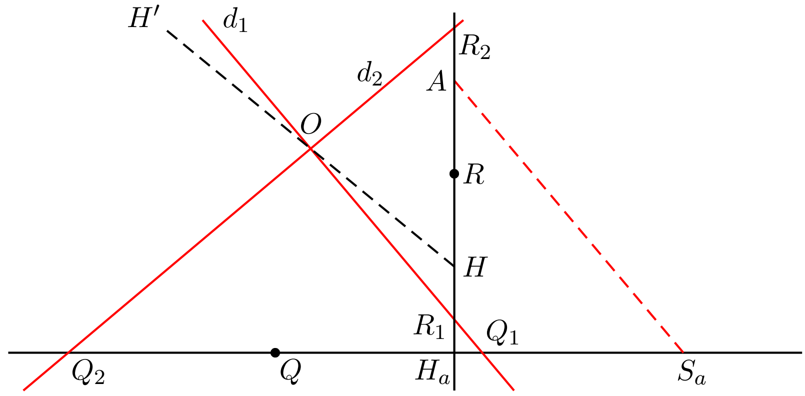

FIG. 4 – Le nœud de la construction

Le triangle $AB'B''$, dont $[AH_a]$ est une hauteur, est inscrit dans l'hyperbole $\mathcal{H}$ équilatère ; son orthocentre est également sur $\mathcal{H}$: c'est le point H, et H', diamétralement opposé à H sur $\mathcal{H}$ est le quatrième point d'intersection de l'hyperbole et du cercle circonscrit à $AB'B''$. On peut donc construire le centre Ω de ce cercle par intersection des médiatrices de $[AH']$ et de $[B'B'']$, cette dernière étant la perpendiculaire en Q à (H_aS_a), puis le cercle lui-même et les points B' et B'' sur (H_aS_a) (cf. fig. 5 p. 5).

Choisissant alors l'un des points B' ou B'' comme sommet B du triangle, on construit le symétrique B_2 de B par rapport à (AS_a) et l'on achève la construction par l'intersection C de (AB_2) et (H_aS_a).

Partant de B et B', nous obtenons deux triangles dont l'un admet (AS_a) pour bissectrice intérieure (cf. fig. 6 p. 5), l'autre l'admet pour bissectrice extérieure (cf. fig. 7 p. 5).

La construction analogue à partir du milieu O de $[AM_1]$ conduit de même à deux autres triangles.

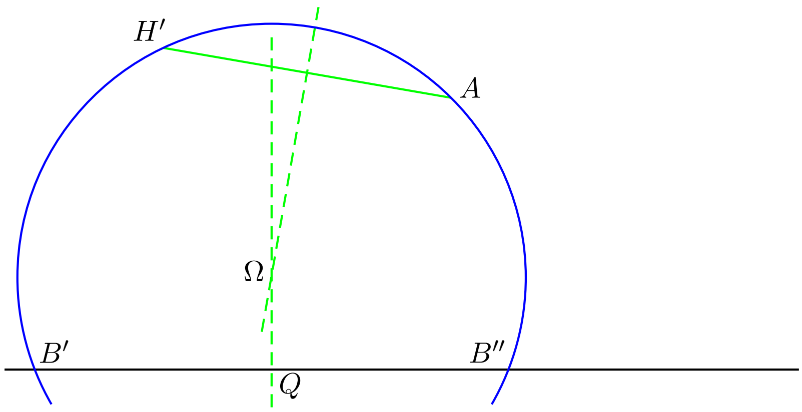

FIG. 5 – Les points B' et B''

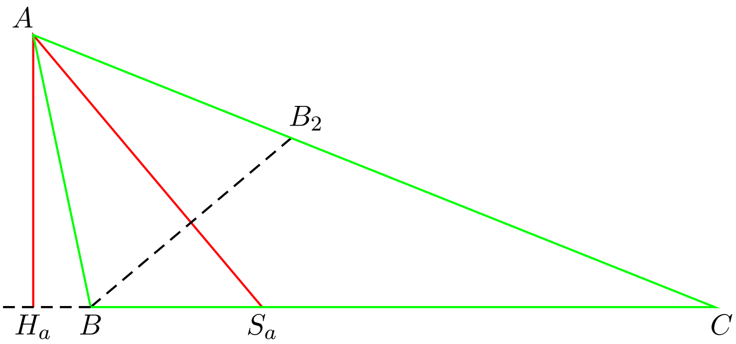

FIG. 6 – Cas de la bissectrice intérieure

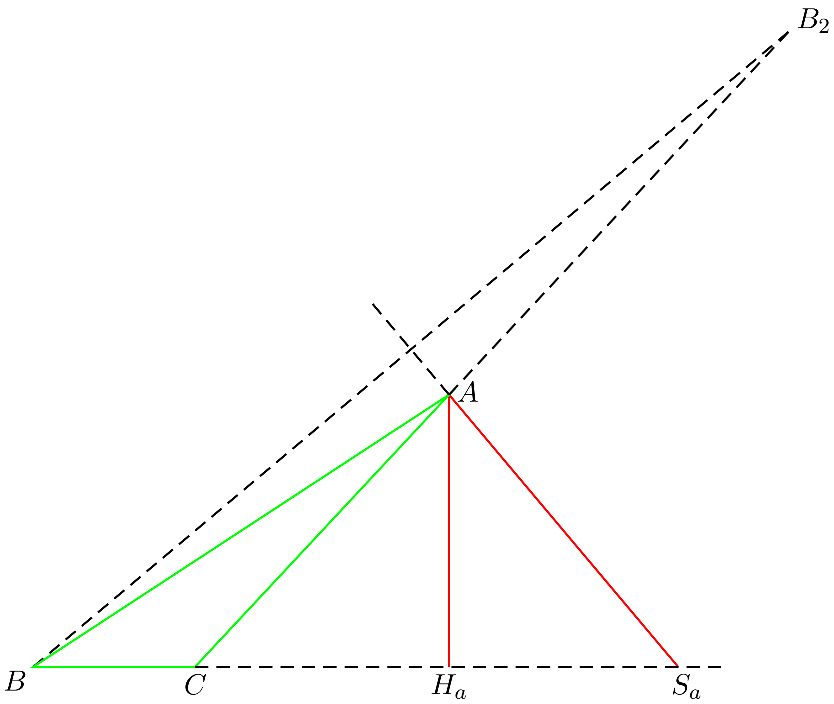

FIG. 7 – Cas de la bissectrice extérieure

Références

[1] K HERTERICH. *Die Konstruktion von Dreiecken*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1986.

[2] В. Б. ФУРСЕНКО. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. *Математика в школе*, 5 : pp. 4–30, 6 : pp. 21–45, 1937.