Une propriété isotomique des droites passant par le centre de gravité

Gilles Boutte
Ancien élève de l'École Normale Supérieure

27 octobre 2002

Abstract

This paper gives a synthetic proof of the result expressed by Bernard Gibert in his message 5848, Wednesday, August 14th, 2002 (a question), to group *Hyacinthos* [1]. Let ABC be a triangle, M any point, N its reflection about G (the centroid of ABC), M^* and N^* their isotomic conjugates, then the lines MN and M^*N^* are parallel. We also prove the lines MN^* and NM^* are intersecting at a point lying on the Steiner circumellipse.

1 Premières propriétés d'isotomie

Nous noterons :

- ABC un triangle non aplati du plan ;
- G le centre de gravité de ABC ;
- P^* l'isotomique d'un point quelconque P par rapport à ABC ;
- $\mathcal{S}$ l'ellipse de Steiner de ABC, isotomique de la droite de l'infini d_∞.

Soient d une droite passant par G, mais ne passant par aucun des sommets du triangle ABC, $\mathcal{H}$ l'hyperbole isotomique de cette droite par rapport à ABC. Nous noterons D le quatrième point (autre que A, B ou C) d'intersection de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{S}$; D^* est donc le point à l'infini de la droite d.

Comme $G^* = G$, d et $\mathcal{H}$ sont sécantes en G donc en un second point Q, et Q^* est l'un des points d'intersection de d et $\mathcal{H}$. Si $Q \neq G$, alors $Q^* \neq G$, donc $Q^* = Q$ et Q, invariant par isotomie, est l'un des sommets du triangle anticomplémentaire $G_aG_bG_c$. Si $Q = G_a$ par exemple, alors $d = (GQ) = (GG_a)$ passe par A contrairement à l'hypothèse : ab absurdo, nous prouvons que Q est confondu avec G.

La droite d est la tangente en G à son hyperbole isotomique $\mathcal{H}$ (cf. fig. 1 p. 2).

Considérons la cubique $\mathcal{K}$, isotomique de pivot D, les tangentes à $\mathcal{K}$ en A, B, C et D concourent en D^*, ou encore la conique polaire γ_{D^*} de D^* par rapport à $\mathcal{K}$ est définie par les cinq points A, B, C, D et D^*, c'est l'hyperbole isotomique de la droite $\delta = (DD^*)$, parallèle à d menée par D. La tangente à γ_{D^*} en D^* est la polaire de D^* par rapport à γ_D, c'est-à-dire la polaire mixte de D et D^* par rapport à $\mathcal{K}$ ou encore la polaire de D par rapport à la conique γ_{D^*} polaire de D^* par rapport à $\mathcal{K}$.

La droite δ est la tangente en D à l'hyperbole $\mathcal{H}$. (cf. fig. 1 p. 2)

2 Points harmoniquement conjugués

Les points G et D sont diamétralement opposés sur la $\mathcal{H}$, autrement dit (GD) est le diamètre conjugué de la direction commune de d et δ.

[1] `http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos`

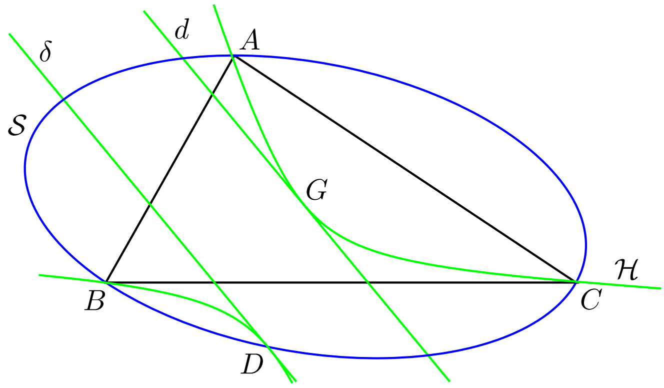

FIG. 1 – Les droites d et δ tangentes à l'hyperbole $\mathcal{H}$

Soit M un point de d, N son symétrique par rapport à G ; les points M^* et N^* appartiennent à $\mathcal{H}$. Caractérisons le fait que G soit le milieu du segment $[MN]$ par la valeur du birapport :

$$(M, N, G, D^*) = -1$$

La droite d qui porte les points M, N, G et D^* ne passe pas par A et l'on peut calculer le birapport précédents grâce à la chaîne d'égalités :

$(M, N, G, D^*) = (AM, AN, AG, AD^*)$	birapport de quatre points de d
$(AM, AN, AG, AD^*) = (AM^*, AN^*, AG, AD)$	propriété du birapport vis à vis de l'isotomie
$(AM^*, AN^*, AG, AD) = (DM^*, DN^*, DG, DD^*)$	birapport de quatre points de $\mathcal{H}$

Nous obtenons finalement la valeur du birapport :

$$(DM^*, DN^*, DG, DD^*) = -1$$

Les droites (DM^*) et (DN^*) sont conjugués par rapport aux droites (DG) et δ.

Comme (DG) est le diamètre de $\mathcal{H}$ conjugué, par rapport à $\mathcal{H}$, de la direction de δ, et que M^* et N^* sont deux points de $\mathcal{H}$, il en résulte que (M^*N^*) est parallèle à δ donc à $d = (MN)$.

Un point M, distinct de G, étant donné, on a montré, lorsque la droite $d = (GM)$ ne passe par aucun des sommets de ABC, que, N étant le symétrique de M par rapport à G, les droites (MN) et (M^*N^*) sont parallèles ; si la droite d passe par l'un des sommets du triangle, alors les points N, M^* et N^* sont tous trois sur d donc, là encore, les droites (MN) et (M^*N^*) sont parallèles. Si $M = G$, alors $M^* = N = N^* = G$ et les droites (MN) et (M^*N^*) ne sont plus définies. On a donc le résultat général :

Soit M un point du plan d'un triangle ABC, distinct du centre de gravité G de ce triangle, soient N le symétrique de M par rapport à G, M^* et N^* les isotomiques respectifs de M et N relativement à ABC, les droites (MN) et (M^*N^*) sont parallèles.

De plus, toujours si d ne passe par aucun sommet du triangle ABC, les droites (MN) et (M^*N^*) sont sévantes en D^* (si d passe par un des sommets du triangles, ces droites sont confondues, leur intersection n'est plus définie). Alors (propriété générales des transformations du second ordre[2]) les droites (MN^*) et (M^*N) sont sécantes en D. On peut donc énoncer :

Soit M un point du plan d'un triangle ABC, distinct du centre de gravité G de ce triangle et tel que la droite (GM) ne passe par aucun des sommets du triangle, soient N le symétrique de M par rapport à G, M^* et N^* les isotomiques respectifs de M et N relativement à ABC, les droites (MN^*) et (M^*N) sont

[2] Voir G. BOUTTE, *Cubiques invariantes par transformation du second ordre*, `http://g.boutte.free.fr/articles/Isocubiques.pdf`, p. 8, prop. 1.4.5.

sécantes en un point D, situé sur l'ellipse de Steiner de ABC et diamétralement opposé à G sur l'hyperbole $\mathcal{H}$ isotomique de la droite (GM). L'isotomique de ce point D est le point à l'infini de la droite (GM).

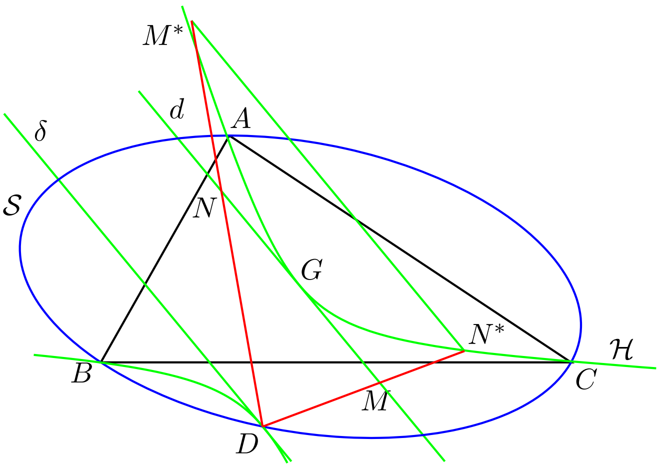

FIG. 2 – Configuration générale des points M, N, M^* et N^*.