

# UNE APPLICATION AFFINE SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE

Gilles Boutte  
Ancien élève de l'École Normale Supérieure

24 mars 2002

## Abstract

This paper gives a synthetic proof of the results expressed by Antreas P. Hatzipolakis in his message 5050, Friday, March 22, 2002 (Eulerline), to group *Hyacinthos*<sup>1</sup>. Let  $ABC$  be a triangle,  $H_aH_bH_c$  its orthic triangle, and  $t$  a parameter, we study triangles in perspective, defined from the points  $M_a$ ,  $M_b$  and  $M_c$  on the altitudes such that:  $\mathbf{AM}_a = t\mathbf{AH}_a$ ,  $\mathbf{BM}_b = t\mathbf{BH}_b$  and  $\mathbf{CM}_c = t\mathbf{CH}_c$ .

## 1 Notations

Nous noterons

- $ABC$  un triangle non aplati du plan ;
- $H$  l'orthocentre de  $ABC$ ,  $H_a$ ,  $H_b$  et  $H_c$  les pieds des hauteurs de  $ABC$  ;
- $O$  le centre du cercle circonscrit à  $ABC$  ;
- $t$  un paramètre réel<sup>2</sup> ;
- $M_a$ ,  $M_b$  et  $M_c$  les points des hauteurs tels que :  $\overrightarrow{AM_a} = t\overrightarrow{AH_a}$ ,  $\overrightarrow{BM_b} = t\overrightarrow{BH_b}$  et  $\overrightarrow{CM_c} = t\overrightarrow{CH_c}$ .

## 2 Homographie fondamentale

Soit  $\varphi_{b,c}$  l'application affine définie de la hauteur  $(BH_b)$  dans la hauteur  $(CH_c)$  par  $\varphi_{b,c}(B) = C$  et  $\varphi_{b,c}(H_b) = H_c$ , on a, pour toute valeur du paramètre  $t$ ,  $\varphi_{b,c}(M_b) = M_c$ . Si l'on note respectivement  $B_\infty$  et  $C_\infty$  les points à l'infini des hauteurs  $(BH_b)$  et  $(CH_c)$ , on peut prolonger  $\varphi_{b,c}$  en une homographie des droites projectives complétées des hauteurs en posant  $\varphi_{b,c}(B_\infty) = C_\infty$ . Les points  $A_\infty$ ,  $B_\infty$  et  $C_\infty$  sont alors les positions de  $M_a$ ,  $M_b$  et  $M_c$  pour la valeur infinie du paramètre  $t$ .

Notons, pour tout point  $P$  du plan,  $\mathcal{D}_P$  le faisceau des droites concourantes en  $P$ . L'homographie  $\varphi_{b,c}$  définit immédiatement une homographie  $\psi_{b,c}$  de  $\mathcal{D}_B$  dans  $\mathcal{D}_C$  par  $\psi_{b,c} : (BM_c) \mapsto (CM_b)$ . Cette dernière homographie  $\psi_{b,c}$  est à la base de toutes les propriétés étudiées dans cette note.

Notons les valeurs particulières de  $\psi_{b,c}$  :

- pour  $t = 0$ ,  $M_b = B$  et  $M_c = C$ , donc  $\psi_{b,c}(BC) = (CB)$  ;
- pour  $t = 1$ ,  $M_b = H_b$  et  $M_c = H_c$ , donc  $\psi_{b,c}(BH_c) = (CH_b)$  ou  $\psi_{b,c}(BA) = (CA)$  ;
- pour  $t = \infty$ ,  $M_b = B_\infty$  et  $M_c = C_\infty$ , donc  $\psi_{b,c}(BC_\infty) = (CB_\infty)$ .

<sup>1</sup> <http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos>

<sup>2</sup> Ce paramètre peut être défini dans le corps des nombres complexes, le choix est laissé à la discrétion du lecteur qui devra adapter les démonstrations.

### 3 Un premier triangle en perspective avec $ABC$

On note respectivement  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  les points d'intersection des droites  $(BM_c)$  et  $(CM_b)$ ,  $(CM_a)$  et  $(AM_c)$ ,  $(AM_b)$  et  $(BM_a)$ . Les valeurs particulières de  $\psi_{b,c}$  données au paragraphe précédent fournissent les positions particulières de  $A_1$  :

- pour  $t = 0$ ,  $A_1$  est indéterminé sur la droite  $(BC)$  ;
- pour  $t = 1$ ,  $A_1 = A$  ;
- pour  $t = \infty$ ,  $(BC_\infty)$  est la perpendiculaire en  $B$  à  $(AB)$  et  $(CB_\infty)$  est la perpendiculaire en  $C$  à  $(AC)$  donc  $A_1 = A'$  diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle circonscrit à  $ABC$ .

**PROPOSITION 1**

Les triangles  $ABC$  et  $A_1B_1C_1$  sont en perspective de centre  $O$ .

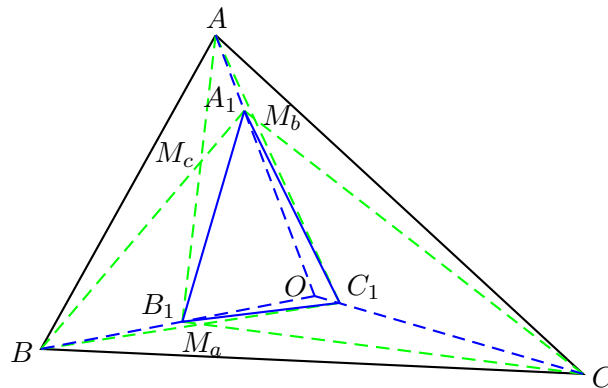


FIG. 1 – Perspective des triangles  $ABC$  et  $A_1B_1C_1$

*Preuve* : Le lieu du point  $A_1$  intersection des droites  $(BM_c)$  et  $(CM_b) = \psi_{b,c}(BM_c)$  qui se correspondent par une homographie de  $\mathcal{D}_B$  dans  $\mathcal{D}_C$  est une conique passant par  $B$  et  $C$ . Les cas particuliers étudiés pour le point  $A_1$  montrent que cette conique contient la droite  $(BC)$  et passe par les points  $A$  et  $A'$  ; elle dégénère en la réunion des droites  $(BC)$  et  $(AA') = (AO)$ .

Hormis le cas  $t = 0$ , le point  $A_1$  est sur  $(AO)$ , et l'on peut, « par continuité », choisir la position  $A_1 = O_a$ , pied de la médiane du point  $O$  sur  $(BC)$  pour lever l'indétermination du cas  $t$  nul.  $A_1$  est alors sur la droite  $(AO)$  dans tous les cas.

De même,  $B_1$  et  $C_1$  sont respectivement sur les droites  $(BO)$  et  $(CO)$  et la proposition en résulte immédiatement. □

### 4 Un deuxième triangle en perspective avec $ABC$

On note respectivement  $A_2$ ,  $B_2$  et  $C_2$  les projections orthogonales de  $A_1$  sur  $(BC)$ , de  $B_1$  sur  $(CA)$  et de  $C_1$  sur  $(AB)$ . Les valeurs particulières de  $A_1$  données au paragraphe précédent fournissent les positions particulières de  $A_2$  :

- pour  $t = 0$ ,  $A_1 = O_a$  sur  $(BC)$ ,  $A_2 = O_a$  ;
- pour  $t = 1$ ,  $A_1 = A$ ,  $A_2 = H_a$  ;
- pour  $t = \infty$ ,  $A_1 = A'$ ,  $A_2 = H'_a$  pied de la médiane de l'isotomique  $H^*$  de  $H$ .

**PROPOSITION 2**

Les triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$  sont en perspective de centre  $P$  dont le lieu est l'hyperbole de Jerabek du triangle  $ABC$ .

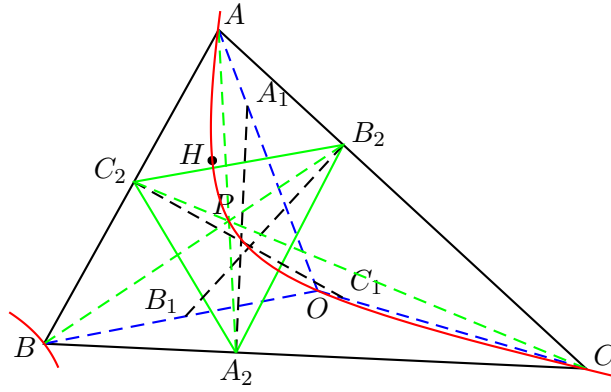


FIG. 2 – Perspective des triangles  $ABC$  et  $A_2B_2C_2$

*Preuve* : Soient  $t_1, t_2, t_3$  et  $t_4$  des valeurs du paramètre  $t$ ; pour tout point  $X$  du plan dépendant de  $t$ , on notera  $X^{(i)}$  sa position pour la valeur  $t_i$  du paramètre. On a alors les égalités de birapport :

$$(BM_c^{(1)}, BM_c^{(2)}, BM_c^{(3)}, BM_c^{(4)}) = (CM_b^{(1)}, CM_b^{(2)}, CM_b^{(3)}, CM_b^{(4)})$$

conservation du birapport par  $\psi_{b,c}$

$$(A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_1^{(3)}, A_1^{(4)}) = (M_b^{(1)}, M_b^{(2)}, M_b^{(3)}, M_b^{(4)})$$

calcul des birapports précédents sur les droites  $(AO)$  et  $(CH)$

$$(A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, A_2^{(3)}, A_2^{(4)}) = (A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_1^{(3)}, A_1^{(4)})$$

conservation du birapport par projection orthogonale

En établissant les égalités similaires par permutations circulaires, on obtient l'égalité des neuf birapports :

$$\begin{aligned} & (M_a^{(1)}, M_a^{(2)}, M_a^{(3)}, M_a^{(4)}) \quad ; \quad (M_b^{(1)}, M_b^{(2)}, M_b^{(3)}, M_b^{(4)}) \quad ; \quad (M_c^{(1)}, M_c^{(2)}, M_c^{(3)}, M_c^{(4)}) \\ & (A_1^{(1)}, B_1^{(2)}, A_1^{(3)}, A_1^{(4)}) \quad ; \quad (B_1^{(1)}, A_1^{(2)}, B_1^{(3)}, B_1^{(4)}) \quad ; \quad (C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}) \\ & (A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, A_2^{(3)}, A_2^{(4)}) \quad ; \quad (B_2^{(1)}, B_2^{(2)}, B_2^{(3)}, B_2^{(4)}) \quad ; \quad (C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}, C_2^{(4)}) \end{aligned}$$

On définit donc une homographie de  $\mathcal{D}_B$  dans  $\mathcal{D}_C$  par  $(BB_2) \mapsto (CC_2)$  et le lieu du point  $P_a$  intersection de  $(BB_2)$  et  $(CC_2)$  est une conique qui contient  $B$  et  $C$ . Les cas particuliers étudiés au début du paragraphe prouvent que cette conique passe par  $O$ ,  $H$  et  $H^*$ ; il s'agit donc de l'hyperbole de Jerabek.

Par permutation circulaire des indices, on montre que le lieu du point  $P_b$  intersection de  $(CC_2)$  et  $(AA_2)$  et le lieu du point  $P_c$  intersection de  $(AA_2)$  et  $(BB_2)$  sont également l'hyperbole de Jerabek. On en déduit  $P_a = P_b = P_c$  et la proposition. □

## 5 Un troisième triangle en perspective avec $ABC$

On note respectivement  $A_3, B_3$  et  $C_3$  les intersections respectives de  $(HA_1)$  et  $(BC)$ , de  $(HB_1)$  et  $(CA)$  et de  $(HC_1)$  et  $(AB)$ . Les valeurs particulières de  $A_1$  données au paragraphe précédent fournissent les positions particulières de  $A_3$  :

- pour  $t = 0$ ,  $A_1 = O_a$  sur  $(BC)$ ,  $A_3 = O_a$ ;
- pour  $t = 1$ ,  $A_1 = A$ ,  $A_3 = H_a$ ;
- pour  $t = \infty$ ,  $A_1 = A'$ ,  $A_3 = A''$  milieu de  $[BC]$ ;
- pour  $t$  tel que  $M_a = H$ , on a  $(BM_a) = (BH) = (BM_b)$  donc  $A_1 = M_b$  et  $C_3 = B$ ; de façon similaire on a  $B_3 = C$ .

PROPOSITION 3

Les triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$  sont en perspective de centre  $Q$  dont le lieu est la droite d'Euler du triangle  $ABC$ .

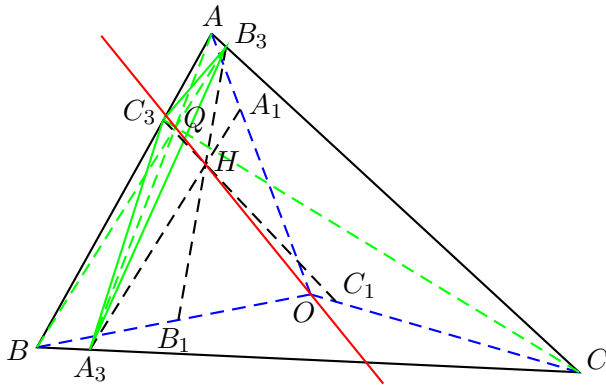


FIG. 3 – Perspective des triangles  $ABC$  et  $A_3B_3C_3$

*Preuve* : Par définition même du point  $A_3$ , on a l'égalité de birapports :

$$(A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}, A_3^{(4)}) = (A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_1^{(3)}, A_1^{(4)})$$

En établissant les égalités similaires par permutations circulaires, on obtient que les trois birapports :

$$(A_3^{(1)}, A_3^{(2)}, A_3^{(3)}, A_3^{(4)}) \quad ; \quad (B_3^{(1)}, B_3^{(2)}, B_3^{(3)}, B_3^{(4)}) \quad ; \quad (C_3^{(1)}, C_3^{(2)}, C_3^{(3)}, C_3^{(4)})$$

sont égaux aux neuf birapports étudiés dans la proposition précédente.

On définit donc une homographie de  $\mathcal{D}_B$  dans  $\mathcal{D}_C$  par  $(BB_3) \mapsto (CC_3)$  et le lieu du point  $Q_a$  intersection de  $(BB_3)$  et  $(CC_3)$  est une conique qui contient  $B$  et  $C$ . Les trois premiers cas particuliers étudiés au début du paragraphe prouvent que cette conique passe par  $O$ ,  $H$  et  $G$ ; il s'agit donc de la conique dégénérée en la réunion de la  $(BC)$  et de la droite d'Euler de  $ABC$ .

La transformation  $(BB_3) \mapsto (CC_3)$  se réduit, dans le quatrième cas particulier, à  $(BC) \mapsto (BC)$ . Le point  $P_a$  est alors indéterminé, et l'on peut lever l'indétermination en définissant, dans ce cas,  $P_a$  comme l'intersection de  $(BC)$  et de la droite d'Euler de  $ABC$  qui est ainsi le lieu du point  $P_a$ .

Par permutation circulaire des indices, on montre que le lieu du point  $Q_b$  intersection de  $(CC_3)$  et  $(AA_3)$  et le lieu du point  $Q_c$  intersection de  $(AA_3)$  et  $(BB_3)$  sont également l'hyperbole de Jerabek. On en déduit  $Q_a = Q_b = Q_c$  et la proposition. □

Je pense que les généralisations proposées par Jean-Pierre Ehrmann dans ses messages 5053 et 5054 sont susceptibles d'être résolues par les méthodes exposées dans cette courte note.