

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES PODAIRES DES CENTRES DES CERCLES EXINSCRITS

Gilles Boutte
Ancien élève de l'École Normale Supérieure

16 mars 2002

Abstract

This paper answers a question from Nikolaos Dergiades to group *Hyacinthos*¹ in his message 4826, Friday, February 22, 2002 (The pedal triangles of I_a, I_b, I_c). We study in this note some properties of a few triangle centers with respect to these pedal triangles.

1 Notations

Dans cette note, ABC est un triangle non aplati pour lequel nous noterons, de façon usuelle, G le centre de gravité, O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, N le centre du cercle d'Euler, I le centre du cercle inscrit, I_a, I_b et I_c les centres des cercles exinscrits, A', B' et C' les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

Nous nous intéresserons aux propriétés des triangles podaires des points I_a, I_b et I_c , notés respectivement $A_a B_a C_a, A_b B_b C_b$ et $A_c B_c C_c$; A_a, B_a et C_a sont les projections orthogonales de I_a sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) respectivement, les triangles podaires de I_b et I_c sont définis de même par permutations circulaires.

2 Un stock de propriétés élémentaires

2.1 Antiparallélisme

DÉFINITION 1 ([3] P. 117)

On dit que les droites δ et δ' sont antiparallèles par rapport aux droites d et d' lorsque l'on a l'égalité d'angles, mesurés modulo π : $\widehat{(d, \delta)} = \widehat{(\delta', d')}$.

Remarque : Cette égalité d'angles est équivalente à la cocyclicité des quatre points d'intersection M, N, P et Q des droites d et d' avec les droites δ et δ' ².

PROPOSITION 1

Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC) , H_b et H_c les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC ; les droites (BC) et (PQ) sont antiparallèles par rapport aux droites (AB) et (AC) si, et seulement si les droites $(H_b H_c)$ et (PQ) sont parallèles.

Preuve : Il est bien connu que H_b et H_c appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$, donc les droites $(H_b H_c)$ et (BC) sont antiparallèles par rapport aux droites (AB) et (AC) . La proposition en résulte immédiatement.

¹ <http://groups.yahoo.com/group/Hyacinthos>

² On peut trouver quelques propriétés de l'antiparallélisme dans [1] pp. 132-135.

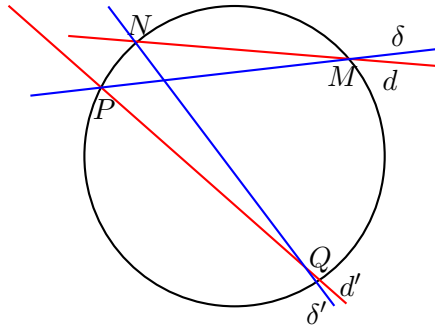


FIG. 1 – Droites antiparallèles

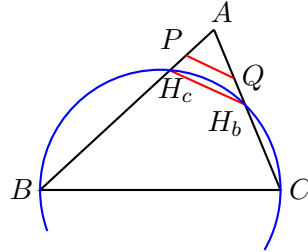


FIG. 2 – Antiparallèles fondamentales

□

PROPOSITION 2

Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC) tels que les droites (BC) et (PQ) soient antiparallèles par rapport aux droites (AB) et (AC) ; les triangles ABC et APQ sont semblables.

Soit M un point quelconque, M' son isogonal par rapport à ABC , M_a le pied de la céviene de M dans ABC , M'_a un point de la droite (PQ) . Le point M'_a est le pied de la céviene de M' dans APQ si, et seulement si les triangles APM'_a et ACM_a sont semblables.

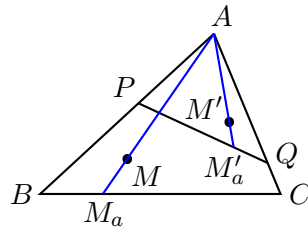


FIG. 3 – Antiparallèles, similitude et isogonalité

Preuve : La similitude des triangles ABC et APQ découle des égalités d'angles qui proviennent de la définition de l'antiparallélisme.

De même, les triangles APM'_a et ACM_a sont semblables si, et seulement s'ils ont même angle en A , ce qui caractérise l'isogonalité de M et M' .

□

Exemples

1. (AM'_a) est la symédiane de ABC issue de A si, et seulement si M'_a est le milieu de $[PQ]$, puisque le point de Lemoine est l'isogonal du centre de gravité.
2. (AM'_a) passe par le centre O du cercle circonscrit à ABC si, et seulement si (AM'_a) est orthogonale à (PQ) , puisque O est l'isogonal de l'orthocentre.

2.2 Quelques centres associés à un triangle

Remarquons que ABC est le triangle orthique³ du triangle $I_a I_b I_c$; les exemples précédents montrent que les droites $(I_a A_a)$, $(I_b B_b)$ et $(I_c C_c)$ concourent au centre Ω du cercle circonscrit à $I_a I_b I_c$ ⁴, et que les droites $(I_a A')$, $(I_b B')$ et $(I_c C')$ concourent au point de Lemoine M du triangle $I_a I_b I_c$, appelé le *Mittelpunkt* du triangle ABC ⁵.

DÉFINITION 2

On appelle centre de Spieker du triangle ABC le centre S du cercle inscrit dans le triangle médial $A'B'C'$, c'est-à-dire le complémentaire du point I ⁶.

Les bissectrices intérieures du triangle médial sont les axes radicaux des cercles exinscrits pris deux à deux. On peut donc définir de façon équivalente le centre de Spieker comme le centre radical des trois cercles exinscrits

LEMME 1

Le centre de Spieker S du triangle ABC est le milieu du segment $[H\Omega]$ (fig. 4).

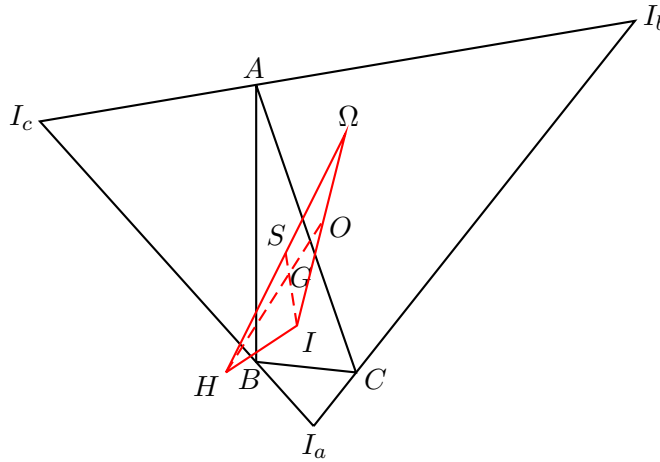


FIG. 4 – Alignements des principaux centres de ABC

Preuve : Le triangle $I_a I_b I_c$ admet I pour orthocentre, Ω pour centre du cercle circonscrit, O pour centre du cercle d'Euler : la symétrie s par rapport à O transforme I en Ω .

L'homothétie h de centre G , de rapport -2 transforme le triangle médial $A'B'C'$ en ABC , donc envoie S en I et O en H . La composée $s \circ h$ est donc une homothétie de rapport 2 qui transforme N en O , donc son centre est H , et S en Ω : S est le milieu de $[H\Omega]$.

□

En fait le triangle $HI\Omega$ admet G pour centre de gravité, $[IS]$ et $[HO]$ pour médianes⁷.

2.3 Des droites parallèles et orthogonales

LEMME 2

Les droites $(A_a B_a)$ et $(C I_c)$, $(A_a C_a)$ et $(B I_b)$, $(B_a C_a)$ et $(I_b I_c)$ sont respectivement parallèles (fig. 5).

³ On peut trouver quelques propriétés usuelles du triangle orthique dans [1] p. 26-35.

⁴ Ce point est référencé X_{40} dans [2].

⁵ Ce point est référencé X_9 dans [2].

⁶ Ce point est référencé X_{10} dans [2].

⁷ Le pied de la troisième médiane est référencé X_{946} dans [2]

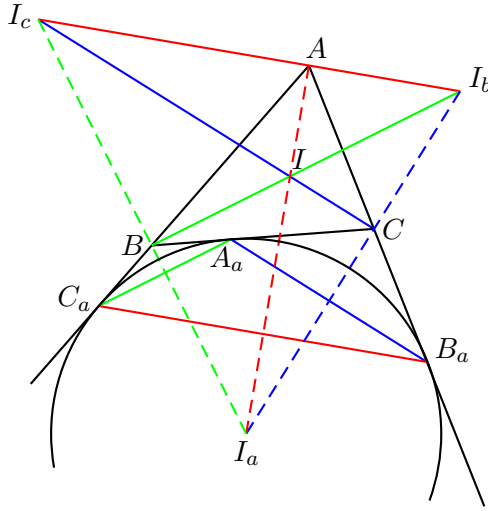


FIG. 5 – Parallélismes

Preuve : Les corde $[A_a B_a]$, $[A_a C_a]$ et $[B_a C_a]$ du cercle exinscrit de centre I_a sont respectivement perpendiculaires aux bissectrices $(I_a I_b)$, $(I_a I_c)$ et $(I_a A)$, et par suite sont parallèles aux bissectrices $(C I_c)$, $(B I_b)$ et $(I_b I_c)$.

□

Le triangle podaire $A_a B_a C_a$ de I_a est donc homothétique du triangle $I I_c I_b$ puisque leurs côtés sont respectivement parallèles. De même $B_b C_b A_b$ et $I I_b I_a$ d'une part, $C_c A_c B_c$ et $I I_a I_c$ d'autre part sont homothétiques. Or $I I_a I_b I_c$ est un quadrangle orthocentrique dont ABC est le triangle orthique. Ce résultat fondamental est la base des propriétés des triangles podaires des centres des cercles exinscrits.

LEMME 3

Le point C'_a , intersection des droites $(B_a C_a)$ et $(I_a I_c)$ est la projection orthogonale de C sur $(I_a I_c)$ (fig. 6).

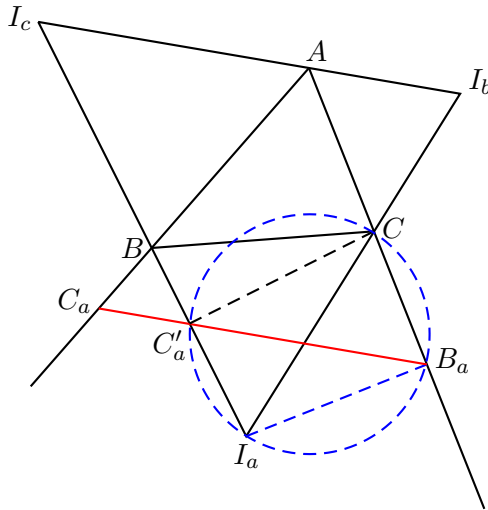


FIG. 6 – Projection de C sur $(I_a I_c)$

Preuve : Le triangle $C B_a I_a$ est rectangle en B_a : B_a appartient au cercle de diamètre $[C I_a]$.

D'autre part ABC est le triangle orthique de $I_a I_b I_c$: les droites $(I_a I_c)$ et (AC) sont antiparallèles par rapport aux droites $(I_b I_a)$ et $(I_b I_c)$. On en déduit les égalités d'angles (mesurés modulo π) :

$$\begin{aligned} (\widehat{AB_a, AI_b}) &= (\widehat{I_a C, I_a C'_a}) && \text{par antiparallélisme de } (I_a I_c) \text{ et } (AC) \\ (\widehat{AB_a, AI_b}) &= (\widehat{B_a C, B_a C'_a}) && \text{par parallélisme de } (B_a C_a) \text{ et } (I_b I_c) \end{aligned}$$

d'où l'égalité des angles $(\widehat{I_a C, I_a C'_a})$ et $(\widehat{B_a C, B_a C'_a})$ modulo π : les points C, B_a, I_a et C'_a sont cocycliques ; C'_a appartient au cercle de diamètre $[CI_a]$, les droites (CC'_a) et $(I_a I_c)$ sont perpendiculaires.

□

Nous noterons A'_b, A'_c, B'_a, B'_c et C'_b les projections orthogonales des points A, B et C sur les côtés du triangle $I_a I_b I_c$ (cf fig. 7), M_a l'intersection des droites $(A_c B_c)$ et $(A_b C_b)$, M_b l'intersection de $(A_c B_c)$ et $(B_a C_a)$, M_c l'intersection de $(A_b C_b)$ et $(B_a C_a)$.

THÉORÈME 1

Les triangles $I_a I_b I_c$ et $M_a M_b M_c$ sont homothétiques, les intersections $A'_b, A'_c, B'_a, B'_c, C'_a$ et C'_b de leurs côtés appartiennent à un cercle \mathcal{C} dont le centre S est le centre de Spieker du triangle ABC ; les droites $(A'_b A'_c)$, $(B'_a B'_c)$ et $(C'_a C'_b)$ sont les côtés du triangle médial $A' B' C'$ de ABC (fig. 7).

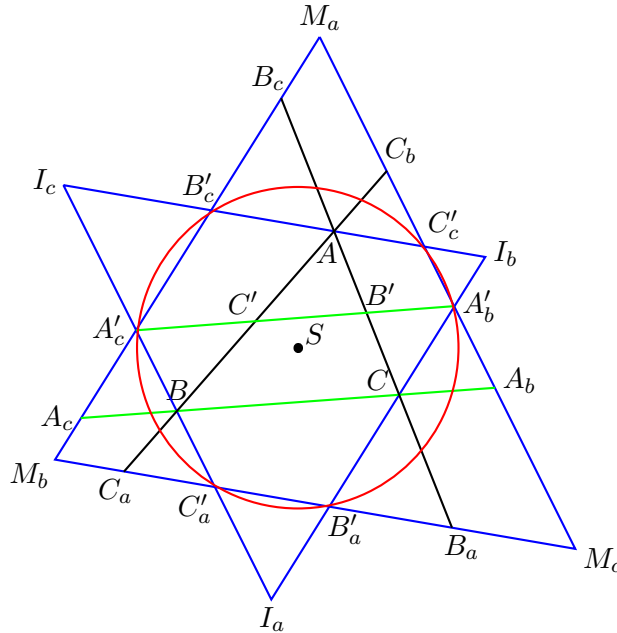


FIG. 7 – Le cercle de Taylor de $I_a I_b I_c$

Preuve : Les triangles $I_a I_b I_c$ et $M_a M_b M_c$ ont, d'après le lemme 2 p. 3, leurs côtés respectivement parallèles et sont donc homothétiques.

Les intersections des côtés de ces triangles sont, d'après le lemme 3 p. 4 les projections $A'_b, A'_c, B'_a, B'_c, C'_a$ et C'_b des points A, B et C sur les côtés du triangle $I_a I_b I_c$. Or ABC est le triangle orthique de $I_a I_b I_c$ donc ces six points appartiennent au cercle de Taylor \mathcal{C} de $I_a I_b I_c$ qui a pour centre S le centre du cercle inscrit dans le triangle médial de ABC , c'est-à-dire le centre de Spieker de ABC ; le fait que les droites $(A'_b A'_c)$, $(B'_a B'_c)$ et $(C'_a C'_b)$ soient les côtés du triangle médial $A' B' C'$ résulte alors de propriétés usuelles du triangle orthique et du cercle de Taylor.

□

Nous noterons désormais h l'homothétie qui transforme $I_a I_b I_c$ en $M_a M_b M_c$, et M le centre de cette homothétie.

2.4 Configuration de Grèbe

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal :

THÉORÈME 2

Le point M est le point de Lemoine des triangles $I_a I_b I_c$ et $M_a M_b M_c$, c'est-à-dire le *Mittelpunkt* du triangle ABC (fig. 8).

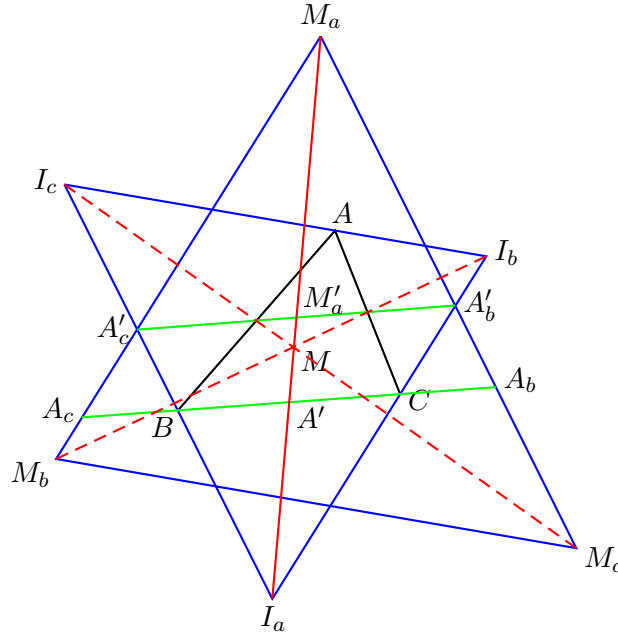


FIG. 8 – La configuration de Grèbe de $I_a I_b I_c$ et $M_a M_b M_c$

Preuve : ABC est le triangle orthique de $I_a I_b I_c$ donc la droite (BC) , ainsi que $(A'_b A'_c)$ qui lui est parallèle, est antiparallèle à $(I_b I_c)$ par rapport à $(I_a I_b)$ et $(I_a I_c)$: la symédiane issue de I_a dans $I_a I_b I_c$ passe par les milieux A' de $[BC]$ et M'_a de $[A'_b A'_c]$.

Soit d l'image de la droite (BC) par l'homothétie h ; d est parallèle à (BC) d'une part, antiparallèle à $(M_b M_c)$ par rapport à $(M_a M_b)$ et $(M_a M_c)$ d'autre part : les droites (BC) et $A'_b A'_c$ sont antiparallèles à $(M_b M_c)$ par rapport à $(M_a M_b)$ et $(M_a M_c)$. Par suite la symédiane issue de M_a dans $M_a M_b M_c$ passe par le milieu M'_a de $[A'_b A'_c]$ et par celui de $[A_b A_c]$ qui n'est autre que A' (isotomie de A_b et A_c).

Finalement les points M_a , M'_a , A' et I_a sont alignés et la droite $(I_a M_a)$ est la symédiane issue de I_a dans $I_a I_b I_c$ et la symédiane issue de M_a dans $M_a M_b M_c$: les deux triangles $I_a I_b I_c$ et $M_a M_b M_c$ ont mêmes symédiennes donc même point de Lemoine qui est leur centre d'homothétie M .

□

Le cercle \mathcal{C} est donc le cercle de Tucker du triangle $I_a I_b I_c$ pour l'homothétie h : son centre S est aligné avec le point de Lemoine M et le centre du cercle circonscrit Ω de $I_a I_b I_c$, lequel est le point de concours des droites $(I_a A_a)$, $(I_b B_b)$ et $(I_c C_c)$ perpendiculaires abaissées des sommets du triangle $I_a I_b I_c$ sur les côtés de son triangle orthique (construction usuelle du centre du cercle circonscrit comme isogonal de l'orthocentre, cf. fig. 9 p. 7).

2.5 Deux centres de $M_a M_b M_c$

THÉORÈME 3

Les droites (AM_a) , (BM_b) et (CM_c) concourent en H qui est le centre du cercle circonscrit au triangle $M_a M_b M_c$ (cf. fig. 10 p. 7).

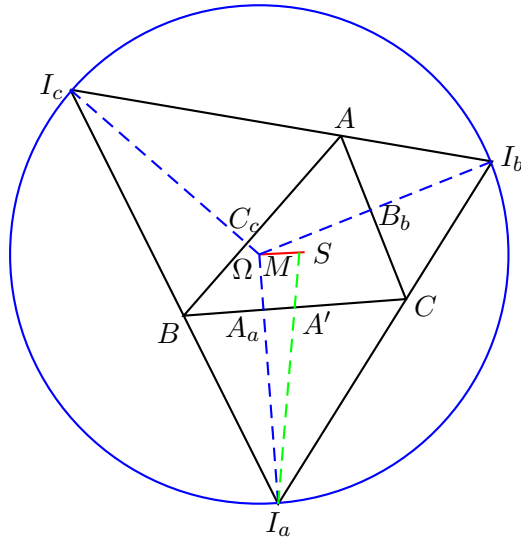


FIG. 9 – Le centre Ω du cercle circonscrit à $I_aI_bI_c$

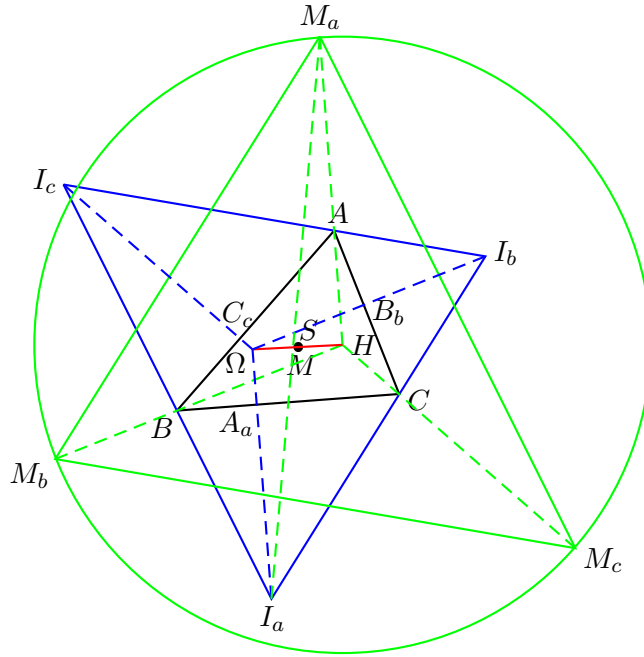


FIG. 10 – Le cercle circonscrit à $M_aM_bM_c$

Preuve : Les droites (I_aA_a) , (I_bB_b) et (I_cC_c) concourent en Ω centre du cercle circonscrit à $I_aI_bI_c$: leurs images par h concourent en Ω' centre du cercle circonscrit à $M_aM_bM_c$. Le cercle \mathcal{C} est le cercle de Tucker de $I_aI_bI_c$ relativement à $M_aM_bM_c$, son centre S est donc le milieu de $[\Omega\Omega']$ et par suite Ω' est l'orthocentre H de ABC .

L'image de (I_aA_a) par h est donc la droite (HM_a) ; ces droites sont parallèles donc (HM_a) , comme (I_aA_a) , est perpendiculaire à (BC) : c'est la hauteur de ABC issue de A .

□

THÉORÈME 4

Les droites (M_aA_a) , (M_bB_b) et (M_cC_c) sont les hauteurs du triangle $M_aM_bM_c$ ⁸ (cf. fig. 11 p. 8).

⁸ L'orthocentre de $M_aM_bM_c$ est référencé X_{72} dans [2], ce point est sur l'axe de Brocard du triangle ABC .

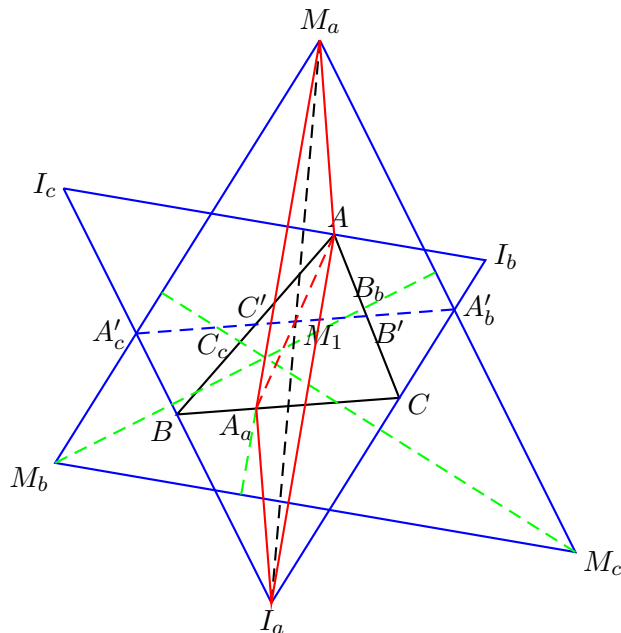


FIG. 11 – Les hauteurs de $M_aM_bM_c$

Preuve : Le quadrilatère $M_aA'_bI_aA'_c$, ses côtés étant parallèles, est un parallélogramme : le milieu M_1 de $[M_aI_a]$ est également le milieu de $[A'_bA'_c]$, donc porté par $(B'C')$ (cf. fig. 7 p. 5). Le milieu M_2 de $[AA_a]$ est également sur la droite $(B'C')$.

Mais d'une part I_a et A_a ont même projection orthogonale sur $(A'B')$ par définition, d'autre part A et M_a ont même projection orthogonale sur $(A'B')$ d'après le théorème 3 : les points M_1 et M_2 sont confondus, $[M_aI_a]$ et $[AA_a]$ ont même milieu, $M_aAI_aA_a$ est un parallélogramme. Par suite les droites (M_aA_a) et (AI_a) sont parallèles et (M_aA_a) est perpendiculaire à (M_bM_c) .

□

Si H_a , H_b et H_c désignent les orthocentres respectifs des triangles podaires de I_a , I_b et I_c , le théorème précédent peut se reformuler sous la forme :

Les droites (A_aH_a) , (B_bH_b) et (C_cH_c) concourent en l'orthocentre du triangle $M_aM_bM_c$.

COROLLAIRE 1

Soient P_a , P_b et P_c les projections orthogonales de A_a sur (B_aC_a) , de B_b sur (A_bC_b) et de C_c sur (A_cB_c) ; les triangles ABC et $P_aP_bP_c$ sont homothétiques de centre M .

Preuve : $M_aM_bM_c$ et $I_aI_bI_c$ sont homothétiques de centre M , ABC est le triangle orthique de $I_aI_bI_c$ alors que $P_aP_bP_c$ est celui de $M_aM_bM_c$ d'après le théorème précédent ; d'où le corollaire.

□

3 Les triangles podaires de I_a , I_b et I_c

3.1 Une propriété de polaires

THÉORÈME 5

Soit O_a le point d'intersection de (A_aI_a) et (B_aC_a) ⁹, O_b et O_c les points définis de façon similaire par permutation circulaire. Les droites (AO_a) , (BO_b) et (CO_c) concourent au centre de gravité G de ABC (cf.

⁹ O_a est, dans le triangle podaire de $I_aI_bI_c$, le pied de la médiane, issue de A_a , du centre du cercle circonscrit.

fig. 12 p. 9).

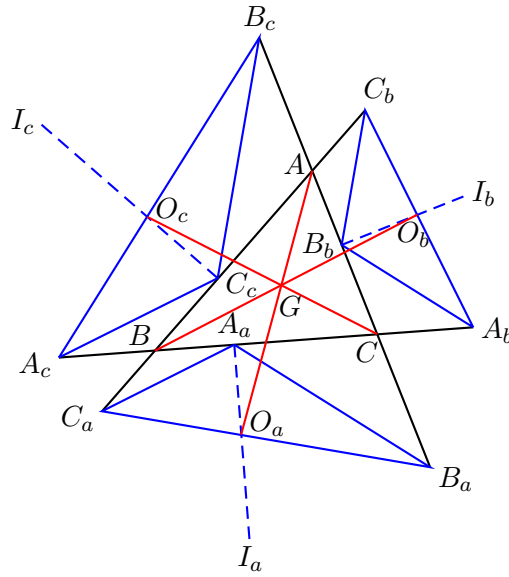


FIG. 12 – Concourance en G

Preuve : Il suffit de montrer que (AO_a) est une médiane de ABC , c'est-à-dire que A, A' et O_a sont alignés (cf. fig. 13 p. 9).

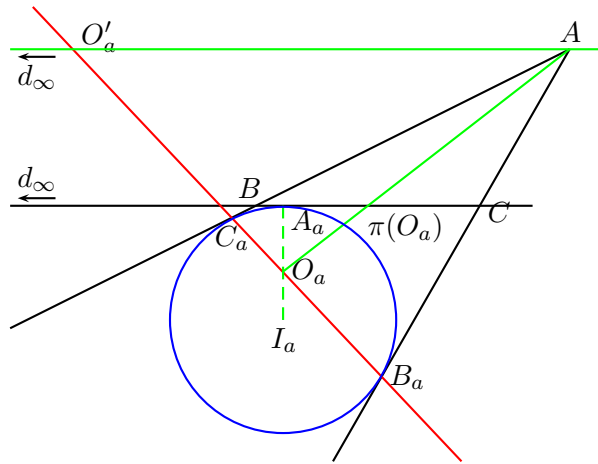


FIG. 13 – Projection centrale sur (B_aC_a)

Le point O_a est sur la droite (B_aC_a) de pôle A par rapport au cercle exinscrit (I_a) , et sur le rayon I_aA_a de ce cercle : la polaire d de O_a par rapport à (I_a) est la perpendiculaire menée de A à (I_aA_a) , soit la parallèle menée de A à (BC) . Soient d_∞ le point à l'infini de d et de (BC) , et O'_a l'intersection de d avec (B_aC_a) ; la projection centrale π , de centre A , sur (B_aC_a) transforme B_a en C , C_a en B , d_∞ en O'_a et, par conservation du birapport, nous avons :

$$(B, C, \pi(O_a), d_\infty) = (C_a, B_a, O_a, O'_a) = -1$$

car O_a et O'_a sont harmoniquement conjugués par rapport à B_a et C_a . Il en résulte que $\pi(O_a)$ est le milieu A' de $[BC]$ et l'alignement de A, A' et O_a .

□

THÉORÈME 6

Soit J_a le pied de la bissectrice de l'angle en A_a dans le triangle $A_aB_aC_a$, J_b et J_c les points définis de façon similaire par permutation circulaire. Les droites (AJ_a) , (BJ_b) et (CJ_c) sont concourantes.

Preuve :

□

3.2 Le quadrangle orthocentrique $II_aI_bI_c$

THÉORÈME 7

Les symédianes issues de A_a dans $A_aB_aC_a$, de B_b dans $B_bC_bA_b$ et de C_c dans $C_cA_cB_c$ concourent au point de Nagel X_8 de ABC (cf. fig. 14 p. 10).

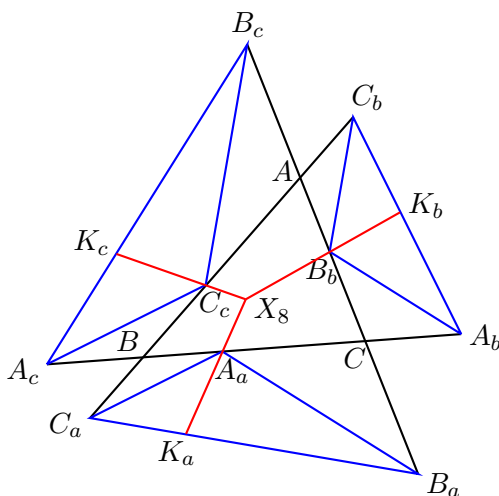


FIG. 14 – Concourance en X_8

Preuve : ABC est le triangle orthique de II_bI_c , donc la symédiane issue de I passe par le milieu A' de (BC) . Les triangles $A_aC_aB_a$ et II_bI_c sont homothétiques : la symédiane issue de A_a dans le triangle podaire de I_a est la parallèle à (IA') menée par A_a .

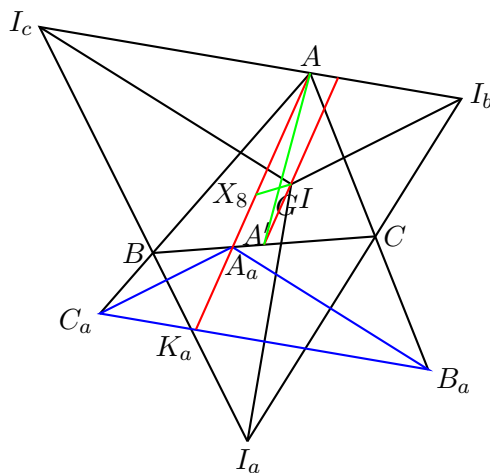


FIG. 15 – Utilisation du quadrangle orthocentrique

Or A' est le complémentaire de A , et celui de I celui du point de Nagel X_8 : les droites (IA') et (AX_8) , céviennes du point de Nagel qui passe par A_a , sont parallèles. Le théorème en résulte immédiatement.

□

On pourrait plus rapidement remarquer que ABC est le triangle tangentiel de $A_aB_aC_a$ dont les symédianes sont donc (AA_a) , (BB_a) et (CC_a) ; en particulier la symédiane issue de A_a passe par le point de Nagel de ABC .

THÉORÈME 8

Soient N_a , N_b et N_c les centres des cercles d'Euler des triangles podaires de I_a , I_b et I_c . Les droites (A_aN_a) , (B_bN_b) et (C_cN_c) sont parallèles à la droite (OI) du triangle ABC (cf. fig. 16 p. 11).

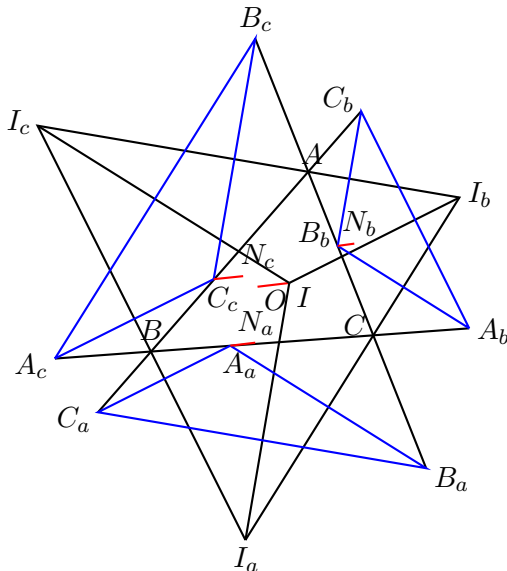


FIG. 16 – Centres des cercles d'Euler des triangles podaires

Preuve : Les triangles II_bI_c , II_cI_a et II_aI_b ont même centre du cercle d'Euler, le centre O du cercle circonscrit à ABC . Dans l'homothétie qui envoie II_bI_c sur $A_aC_aB_a$, la droite (OI) a pour image la droite (A_aN_a) qui lui est donc parallèle.

□

4 Utilisation du triangle tangentiel

4.1 Droites d'Euler

THÉORÈME 9

Soit ABC un triangle, et $A'B'C'$ son triangle tangentiel. Le centre O' du cercle circonscrit à $A'B'C'$ appartient à la droite d'Euler de ABC ¹⁰ (cf. fig. 17 p. 12).

Preuve : Soit $H_aH_bH_c$ le triangle orthique de ABC , ses côtés sont respectivement parallèles à ceux de $A'B'C'$: les triangles orthique et tangentiel de ABC sont homothétiques. Les droites (H_aH) et $(A'O)$, perpendiculaires à (BC) se correspondent dans cette homothétie, de même que (H_bH) et $(B'O)$ d'une part, (H_cH) et $(C'O)$ d'autre part. Les points H et O sont homothétiques donc alignés avec le centre P de l'homothétie¹¹ : P est sur la droite (OH) , droite d'Euler de ABC . Le cercle circonscrit à $H_aH_bH_c$ est le

¹⁰ On a en fait le résultat plus fin : Le cercle circonscrit d'un triangle, son cercle d'Euler et le cercle circonscrit au triangle tangentiel appartiennent à un même faisceau de cercles.

Je remercie Edward Brisse de m'avoir fait remarquer le cercle circonscrit au triangle tangentiel et le cercle d'Euler sont inverses par rapport au cercle circonscrit

¹¹ Ce point est référencé X_{25} dans [2].

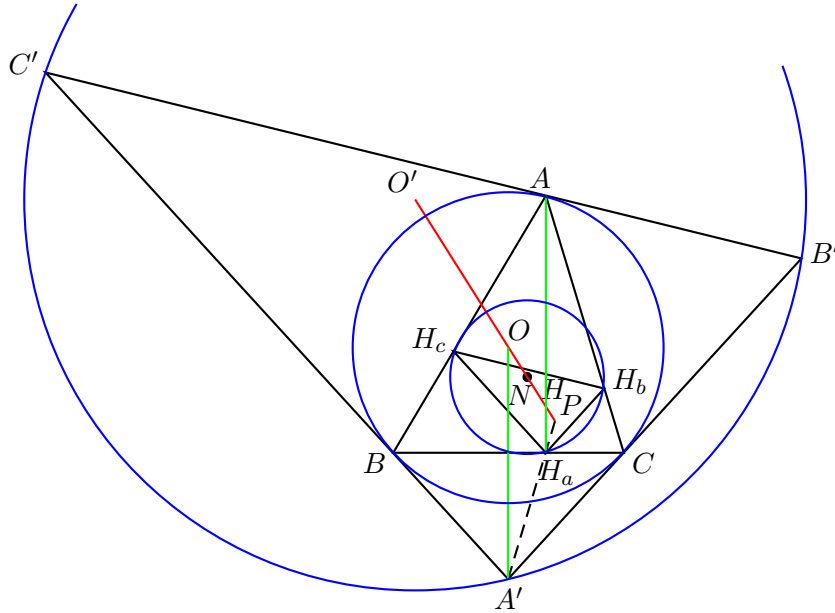


FIG. 17 – Alignement sur la droite d'Euler

cercle d'Euler de ABC de centre N qui est donc homothétique du centre O' du cercle circonscrit à $A'B'C'$ ¹² : P est aligné avec O' et N et appartient par suite à la droite d'Euler de ABC .

□

THÉORÈME 10

Les droites d'Euler des triangles podaires des centres des cercles inscrits et exinscrits concourent en O sur la droite d'Euler du triangle ABC .

Preuve : Le triangle ABC est le triangle tangentiel commun des triangles podaires de I , I_a , I_b et I_c ; le théorème en résulte immédiatement du théorème précédent.

□

4.2 Axes de Brocard

THÉORÈME 11

Dans un triangle ABC , le centre du cercle inscrit I , le point de Gergonne G' et le point de Longchamps L sont alignés.

Preuve : Les points S , centre de Spieker, M , Mittenpunkt et H , orthocentre, sont les complémentaires de I , G' et L . L'alignement de I , G' et L résulte de celui de S , M et H .

□

Si ABC a pour triangle tangentiel $A'B'C'$, le point de Gergonne de $A'B'C'$ est le point de Lemoine K de ABC , le centre du cercle inscrit à $A'B'C'$ est le centre O du cercle circonscrit à ABC et l'on a :

Le point de Longchamps du triangle tangentiel de ABC est alignée sur la droite (OK) (axe de Brocard du triangle).

THÉORÈME 12

Les axes de Brocard des triangles podaires des centres des cercles inscrits et exinscrits concourent en L , point de Longchamps de ABC , sur la droite d'Euler du triangle ABC .

¹² Ce point est référencé X_{26} dans [2].

Preuve : Le résultat résulte immédiatement de la remarque précédente et du fait que ABC est le triangle tangentiel des triangles podaires des centres des cercles inscrit et exinscrits.

□

Références

- [1] Yvonne et René SORTAIS. *La géométrie du triangle*. HERMANN, Paris, 1987.
- [2] C. KIMBERLING. Encyclopedia of triangle centers. <http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>, 2000.
- [3] Eugène ROUCHÉ et Charles DE COMBEROUSSE. *Traité de géométrie*. GAUTHIER-VILLARS, Paris, 6^e édition, 1891.